# I RAČUNANJE S PRIBLIŽNIM VREDNOSTIMA

## 0. VRSTE GREŠAKA

U numeričkoj matematici najčešće se srećemo sa zadacima koji se mogu zapisati u sledećem obliku

(1) $$y = f(x)$$

U opštem slučaju zadatak (1) se zamenjuje jednostavnijim zadatkom

(1*) $$y^* = f^*(x^*)$$

Unutrašnja karakteristika numeričke matematike je da je u njoj od bitnog značaja procenjivanje tačnosti dobijenih rezultata. Raznovrsni su uzroci koji uslovljavaju greške rešenja, ali se kao najčešći mogu istaći sledeći:

a) netačni početni podaci (dobijeni eksperimentima; iracionalni brojevi $\pi$, $e$, $\sqrt{2}$ itd., koji se moraju zameniti približnim vrednostima),

b) zamena zadatka (1) odgovarajućim zadatkom (1*). Prirodno je da će se rešenje zadatka (1*) razlikovati od tačnog rešenja zadatka (1),

c) u procesu rešavanja zadatka (1*) često dolazi do povećanja broja cifara tako da se mora pristupiti odbacivanju izvesnih cifara u rezultatu računanja.

Greške koje odgovaraju navedenim uzrocima nazivaju se respektivno:

a) *neotklonjiva greška*,

b) *greška metode*,

c) *računska greška*.

# 1. POJAM PRIBLIŽNOG BROJA I IZVORI GREŠAKA U REZULTATIMA RAČUNANJA

**Primer 1**. Na fudbalskoj utakmici bilo je 35000 gledalaca.

**Primer 2**. Neka treba odrediti ubrzanje Zemljine teže $g$ pomoću matematičkog klatna, tj. pomoću obrasca

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

onda ćemo izmeriti dužinu $l$ i period oscilovanja $T$. Uvrstiti dobijene vrednosti $l$ i $T$ i broj $\pi$, pa izračunati $g$. Izračunata vrednost $g$ je približna. Naime, nije moguće tačno odrediti veličine $l$ i $T$, a umesto tačnog broja $\pi$, koji ima beskonačno mnogo decimala, moramo uzeti vrednost s konačno mnogo decimala. ▲

**Primer 3**. Neka treba izračunati dijagonalu kvadrata $d$ stranice $a = 4$.

Iskoristićemo dobro poznat obrazac $d = a\sqrt{2}$. Ako bi stranica $a$ bila tačno određena, dijagonalu $d$ ne bismo mogli tačno izračunati jer u obrascu učestvuje iracionalan broj $\sqrt{2}$. ▲

**Primer 4**. Iracionalni broj $\sqrt{2}$ može biti izračunat koristeći činjenicu da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) = \sqrt{2}.$$

Međutim, praktično je nemoguće dobiti tačnu vrednost broja $\sqrt{2}$ zato što se radi o jednom beskonačnom procesu. ▲

**Primer 5**. Ako treba izračunati proizvod

$$258.14736 \cdot 0.1112229$$

koristeći, na primer, džepni kalkulator – „digitron“ koji ima osam mesta, onda ćemo morati odbaciti izvestan broj cifara na kraju rezultata („digitron“ to sam „uradi“). Dobićemo 28.711898, a tačan rezultat je 28.711898006544. ▲

Ovim primerima upravo smo i ilustrovali izvore grešaka u rezultatima računanja:

- polazni podaci su eksperimentalne prirode (dobijeni eksperimentom: brojanjem, merenjem, ...),
- u procesu računanja pojavljuju se iracionalni brojevi kao što su: $\sqrt{2}$, $\pi$, ...
- primenjena metoda daje tačan rezultat tek posle beskonačno mnogo ponavljanja određenog računskog procesa,

– već kod najjednostavnijih računskih operacija broj cifara se toliko poveća da ih nije moguće „smestiti“ u mašinu za računanje,
– najzad, početne greške se prenose s operacije na operaciju i pri tome se transformišu, akumuliraju i pojavljuju se nove greške.

## 2. APSOLUTNA, RELATIVNA, PROCENTUALNA I PROMILNA GREŠKA PRIBLIŽNOG BROJA

Jedan od osnovnih zadataka u numeričkoj matematici je davanje matematičke karakteristike tačnosti približnog broja. Ovaj zadatak se sastoji u uvođenju pojma tačnosti približnog broja, odnosno u definisanju grešaka približnog broja.

Označimo sa $x$ tačan a sa $x^*$ njemu približan broj. Prirodno se postavlja problem ocene stvarno učinjene greške ako umesto tačnog broja $x$ uzmemo njegovu približnu vrednost $x^*$, tj. problem ocene razlike $\Delta = x - x^*$, ocena stvarne greške. Veličina $\Delta = x - x^*$ je *stvarna* greška.

**Definicija 1**. *Apsolutna greška*, u oznaci $\Delta x^*$, približnog broja $x^*$ je apsolutna vrednost razlike tačnog broja $x$ i njemu približnog broja $x^*$, tj.

(1) $$\boxed{\Delta x^* = |x - x^*|\,.}$$

Kako tačan broj $x$ u velikom broju slučajeva nije poznat, to se samim tim ni apsolutna greška $\Delta x^*$ ne može izračunati. Zbog toga uvodimo pojam granice apsolutne greške.

**Definicija 2**. *Granica apsolutne greške* približnog broja $x^*$ naziva se svaki broj $Ax^*$ koji nije manji od apsolutne greške, tj.

(2) $$\Delta x^* = |x - x^*| \le Ax^*\,.$$

Iz (2) dobijamo

$$-Ax^* \le x - x^* \le Ax^*,$$

ili

(3) $$x^* - Ax^* \le x \le x^* + Ax^*,$$

što se, radi kratkoće, najčešće zapisuje u sledećem obliku

$$\boxed{x = x^* \pm Ax^*\,.}$$

**Primer 1**. Ako umesto tačnog broja $e = 2.718281828...$ uzmemo približnu vrednost $e^* = 2.72$, izračunati apsolutnu grešku i granicu apsolutne greške.

*Rešenje*. Apsolutna greška je

$$\Delta e^* = |e - e^*| = |2.718281828... - 2.72| = 0.01718171...$$

za granicu apsolutne greške možemo uzeti:

$$Ae^* = 0.0018, \text{ jer je } \Delta e^* = 0.001718171... < 0.0018$$

ili

$$Ae^* = 0.002, \text{ jer je } \Delta e^* = 0.001718171... < 0.002\,.$$

Međutim, najčešće se uzima:

$$Ae^* = 0.005 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} \text{ ili } Ae^* = 0.01 = 1\cdot 10^{-2}\,. \ \blacktriangle$$

**Definicija 3**. *Relativna greška* približnog broja $x^*$, u oznaci $\delta x^*$, je količnik apsolutne greške tog približnog broja i apsolutne vrednosti tačnog broja, tj.

(4) $$\boxed{\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x|} \quad (x \neq 0)\,.}$$

Kako apsolutna greška u velikom broju slučajeva nije poznata, to se samim tim ni relativna greška $\delta x^*$ ne može izračunati. Zbog toga uvodimo pojam granice relativne greške.

**Definicija 4**. *Granica relativne greške* približnog broja $x^*$ naziva se svaki broj $Rx^*$ koji nije manji od relativne greške, tj.

(5) $$\boxed{\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x|} \leq Rx^*\,.}$$

**Primedba**. Budući da tačna vrednost $x$, po pravilu, nije poznata, to u definicijama 3 i 4 umesto $x$ uzimamo $x^*$. Dakle,

(4') $$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|}, \quad (x^* \neq 0)$$

i

(5') $$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|} \leq Rx^*$$

**Primer 2**. Ako je tačan broj $\pi = 3.1415926...$ a približan $\pi^* = 3.14$, izračunati relativnu grešku i granicu relativne greške.

*Rešenje*. Relativna greška je

$$\delta\pi^* = \frac{\Delta\pi^*}{|\pi^*|} = \frac{|3.1415926... - 3.14|}{3.14} = 0.000507...;$$

za granicu relativne greške možemo uzeti:

$$R\pi^* = 0.000508, \text{ jer je } \delta\pi^* = 0.000507... < 0.000508$$

ili

$$R\pi^* = 0.00051, \text{ jer je } \delta\pi^* = 0.000507... < 0.00051\,.$$

Međutim, najčešće se uzima:

$$R\pi^* = 0.0006 \text{ ili } R\pi^* = 0.001 \text{ ili } R\pi^* = 0.005 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}\,. \blacktriangle$$

**Primedba 5**. Kako je

$$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|} \le \frac{Ax^*}{|x^*|} \quad (x^* \ne 0),$$

to se može uzeti

$$\boxed{Rx^* = \frac{Ax^*}{|x^*|} \quad (x^* \ne 0)}\,.$$

Zbog praktičnih potreba definišu se *procentualna* i *promilna greška* kao i njihove granice. Dakle,

$P_{\%}x^* = 100 \cdot \delta x^*$ – procentualna greška,

$\overline{P}_{\%}x^* = 100 \cdot \delta x^*$ – granica procentualne greške,

$P_{‰}x^* = 1000 \cdot \delta x^*$ – promilna greška,

$\overline{P}_{‰}x^* = 1000 \cdot Rx^*$ – granica promilne greške.

## 3. ZNAČAJNE I SIGURNE CIFRE PRIBLIŽNOG BROJA

Poznato je da se svaki realan broj $x$ zapisan u dekadnom sistemu računanja može predstaviti u obliku

(1) $\boxed{x = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + a_{k+1} 10^{n-k} + \cdots + a_m 10^{n-m+1} + \cdots)}$,

gde su $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, cifre broja $x$, $a_1 \neq 0$, $n \in Z$, $k \in N$, $m \in N$. U numeričkoj matematici, kao što je ranije rečeno, imamo posla češće s približnim brojevima. Približni brojevi imaju, po pravilu, konačan broj cifara. Odgovarajući približan broj $x^*$ može se predstaviti u obliku

(2) $\boxed{x^* = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + a_{k+1} 10^{n-k} + \cdots + a_m 10^{n-m+1})}$.

**Primer 1**. Tačan broj $e = 2.718281828\ldots$ se može predstaviti u obliku

$$e = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} + \cdots,$$

a odgovarajući približan broj $e^* = 2.72$ u obliku

$$e^* = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2};$$

Uvedimo sledeće pojmove koji se odnose na cifre približnog broja (2).

**Definicija 1**. Cifra $a_i$ približnog broja $x^*$ naziva se *značajnom* (ponegde, vrednosnom) cifrom, ako je ona različita od nule ili je nula između cifara različitih od nule.

**Primer 2**. Približan broj $x_1^* = 0.0210032000$ ima devet značajnih cifara i to su: 2, 1, 3, 2, zatim dve nule između 21 i 32 i tri nule na kraju broja.

Brojevi $x_1^* = 0.0210032000$ i $x_2^* = 0.0210032$ bitno se razlikuju u numeričkoj matematici; naime, podrazumeva se da je $Ax_1^* = 10^{-10}$ (ili $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$) a $Ax_2^* = 10^{-7}$ (ili $\frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$), pa je $x_2^*$, očigledno, dosta netačniji približan broj. ▲

**Definicija 2**. Značajna cifra $a_k$ približnog broja $x^*$ naziva se *sigurnom* (ponegde, pouzdanom) cifrom u „ω smislu“, ako je

(3) $\boxed{Ax^* \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \leq 1}$.

Za $\omega = 1$ cifra $a_k$ je sigurna u *širem*, a za $\omega = \frac{1}{2}$ u *užem* smislu.

Cifre koje nisu sigurne nazivamo *sumnjivim* (ponegde, nepouzdanim) ciframa.

Očigledno, ako je $a_k$ sigurna cifra, onda su sigurne i sve značajne cifre ispred nje: $a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1$.

**Primer 3**. Dati su brojevi $x$ = 23.458 i $x^*$ = 23.456. Odrediti broj sigurnih cifara približnog broja $x^*$ u užem i širem smislu.

*Rešenje*. Kako je

$$\Delta x^* = |23.458 - 23.456| = 0.002 < 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = Ax^*,$$

to iz

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k+1}$$

dobijamo $k$ = 4. Dakle, približan broj $x^*$ ima četiri sigurne cifre u užem (pa samim tim i u širem, jer je $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \leq 1 \cdot 10^{-2}$ ) smislu. To su cifre: 2, 3, 4 i 5. ▲

## 4. ZAOKRUGLJIVANJE BROJEVA

Vrlo često umesto brojeva s beskonačno mnogo ili konačno mnogo cifara moramo uzeti brojeve s manje cifara, tj. moramo odbaciti jednu ili više poslednjih cifara. To odbacivanje se ne vrši proizvoljno. To se čini tako da učinjena greška bude što je moguće manja, pa se odbacivanje prema tom principu zove *zaokrugljivanje* brojeva, a nastala greška je *greška zaokrugljivanja*.

Neka je dat (tačan ili približan) broj

$$x = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + a_{k+1} 10^{n-k} + \cdots + a_m 10^{n-m+1} + \cdots), \tag{1}$$

koji ima više od $m$ cifara. Treba ga zameniti brojem koji ima $m$ cifara. Kako je

$$a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_m 10^{n-m+1} \le |x| \le a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + (a_m + 1) 10^{n-m+1},$$

to će se pri realizaciji tog postupka dobiti broj $x^*$ koji će biti

$$x^* = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_m 10^{n-m+1}), \tag{2}$$

ili

$$x^* = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + (a_m + 1) 10^{n-m+1}). \tag{3}$$

Postavlja se pitanje: Kada će rezultat zaokrugljivanja biti broj $x^*$ zapisan u obliku (2), a kada u obliku (3)? Imajući u vidu prirodan zahtev da rezultat zaokrugljivanja ima što je moguće manju apsolutnu grešku, jasan je odgovor na postavljeno pitanje. Zaokrugljivanje treba da je takvo da bude

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}, \tag{4}$$

tj. da su sve cifre zaokrugljenog broja $x^*$ sigurne u užem smislu. Prema tome, mogu se razlikovati tri slučaja:

1) $a_{m+1} 10^{n-m} + a_{m+2} 10^{n-m-1} + \cdots < \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}$,

2) $a_{m+1} 10^{n-m} + a_{m+2} 10^{n-m-1} + \cdots > \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}$,

3) $a_{m+1} 10^{n-m} + a_{m+2} 10^{n-m-1} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}$.

Očigledno je da u prvom slučaju pri zaokrugljivanju broj $x^*$ mora biti zapisan u obliku (2), u drugom slučaju u obliku (3), a u trećem slučaju se može uzeti (2) ili (3), ali se iz praktičnih razloga koristi tzv. *pravilo parne cifre*: ako je $a_m$ parna cifra uzima se zapis (2) a u protivnom zapis (3).

Saglasno svemu rečenom sada možemo eksplicitno zapisati pravila zaokrugljivanja brojeva:

(I) Ako je prva od odbačenih cifara (cifra $a_{m+1}$) manja od 5, onda zadržane cifre ostaju nepromenjene; kaže se – ne vrši se popravka;

(II) Ako je prva od odbačenih cifara (cifra $a_{m+1}$) veća od 5, onda poslednju zadržanu cifru (cifru $a_m$) povećavamo za 1; kaže se – vrši se popravka;

(III) Ako je prva od odbačenih cifara (cifra $a_{m+1}$) jednaka 5, a ostale koje dolaze posle nje nisu sve nule, onda poslednju zadržanu cifru (cifru $a_m$) povećavamo za 1, tj. vrši se popravka;

(IV) Ako je prva od odbačenih cifara (cifra $a_{m+1}$) jednaka 5, a ostale koje dolaze posle nje su sve nule, onda važi pravilo parne cifre, tj. ako je $a_m$ parna, ne vrši se popravka a ako je $a_m$ neparna cifra, vrši se popravka. Kratko, u oba slučaja dobija se paran broj!

## 5. VEZA IZMEĐU GRANICE RELATIVNE GREŠKE PRIBLIŽNOG BROJA I BROJA NJEGOVIH SIGURNIH CIFARA

Granica apsolutne greške približnog broja

(1) $$x^* = \pm(a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + \cdots + a_m 10^{n-m+1}), \quad a_1 \neq 0,$$

kod kojeg je $a_k$ poslednja sigurna cifra, tj. kod kojeg je

(2) $$\boxed{Ax^* \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \leq 1,}$$

je povezana s brojem sigurnih cifara, upravo, relacijom (2).

U kakvoj zavisnosti su broj sigurnih cifara približnog broja $x^*$ i njegova granica relativne greške $Rx^*$? Jasno je da je

(3) $$\omega \cdot 10^{n-k} < Ax^*$$

(u protivnom bi poslednja sigurna cifra bila $a_{k+1}$). Iz (2) i (3) imamo

(4) $$\omega \cdot 10^{n-k} < Ax^* \leq \omega \cdot 10^{n-k+1},$$

odnosno

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{|x^*|} < \frac{Ax^*}{|x^*|} \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{|x^*|}, \quad x^* \neq 0,$$

ili

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{|a_1 10^n + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + \cdots|} < Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{|a_1 10^n + \cdots + a_k 10^{n-k+1} + \cdots|},$$

pa je

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{(a_1 + 1) \cdot 10^n} < Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{a_1 \cdot 10^n},$$

ili

(5) $$\boxed{\frac{\omega}{(a_1 + 1) \cdot 10^k} < Rx^* \leq \frac{\omega}{a_1 \cdot 10^{k-1}}.}$$

Približno se uzima da je (što je prilično gruba ocena)

(6) $$Rx^* \approx \frac{\omega}{a_1 \cdot 10^{k-1}},$$

gde je $a_1$ prva sigurna cifra, $k$ je broj sigurnih cifara približnog broja $x^*$ a $0 < \omega \leq 1$.

**Primer 1**. Neka je dat približan broj $x^* = 0.44721$ i granica relativne greške $Rx^* = 0.000002$. Odrediti broj sigurnih cifara u užem smislu.

*Rešenje*. Kako je

$$\frac{0.5}{(4+1)\cdot 10^{k}} < 0.000002 \leq \frac{0.5}{4\cdot 10^{k-1}},$$

tj.

$$\frac{1}{10}\cdot 10^{-k} < 2\cdot 10^{-6} \leq \frac{1}{8}\cdot 10^{-(k-1)},$$

odnosno

$$1\cdot 10^{-k+5} < 2\cdot 10^{0} \leq \frac{100}{8}\cdot 10^{-k+5} = 2\cdot \frac{50}{8}\cdot 10^{-k+5} < 2\cdot 10^{-k+6}$$

biće $-k + 5 \leq 0$, tj. $k \geq 5$ i $0 < -k + 6$, tj. $k < 6$. Dakle, $k = 5$, pa $x^*$ ima pet sigurnih cifara u užem smislu. ▲

## 6. OPŠTA FORMULA ZA GREŠKU PRIBLIŽNE VREDNOSTI FUNKCIJE

Neka je data funkcija $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, definisana u nekoj oblasti svojih nezavisno promenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$. Pretpostavimo da su nepoznate tačne vrednosti promenljivih $x_1, x_2, ..., x_n$, a da su umesto njih poznate približne vrednosti $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, kao i njihove stvarne greške $\Delta_i = x_i - x_i^*$, apsolutne greške $\Delta x_i^* = |x_i - x_i^*|$ i granice apsolutnih grešaka $Ax_i^*$, $i = \overline{1, n}$. Centralni problem je ocena greške kada se umesto tačne vrednosti $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ uzme približna vrednost funkcije $f^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, tj. ocena razlike $\Delta = f - f^*$, ocena stvarne greške.

**Definicija 1**. *Apsolutna greška približne vrednosti funkcije*, u oznaci $\Delta f^*$, je

$$\boxed{\Delta f^* = |f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)| \equiv |f - f^*|.}$$

**Definicija 2**. *Granica apsolutne greške približne vrednosti funkcije* je svaki broj $Af^*$ koji nije manji od apsolutne greške funkcije, tj.

$$\boxed{\Delta f^* = |f - f^*| \le Af^*.}$$

**Definicija 3**. *Relativna greška približne vrednosti funkcije*, u oznaci $\delta f^*$, je

$$\boxed{\delta f^* = \frac{\Delta f^*}{|f^*|} \quad (f^* \neq 0).}$$

**Definicija 4**. *Granica relativne greške približne vrednosti funkcije* je svaki broj $Rf^*$ koji nije manji od relativne greške funkcije, tj.

$$\boxed{\delta f^* = \frac{\Delta f^*}{|f^*|} \le Rf^*.}$$

Pretpostavimo da je data funkcija $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferencijabilna po svim argumentima. Neka su poznate stvarne greške $\Delta_i = x_i - x_i^*$, apsolutne greške $\Delta x_i^* = |x_i - x_i^*|$ i granice apsolutnih grešaka $Ax_i^*$ promenljivih $x_i, i = \overline{1, n}$. Na osnovu Tejlorove formule za funkcije više nezavisno promenljivih imamo

$$
\begin{aligned}
\Delta = f - f^* &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\
&= f(x_1^* + \Delta_1, x_2^* + \Delta_2, \ldots, x_n^* + \Delta_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\
&= \Bigg[ f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \frac{1}{1!}\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n \right) + \\
&+ \varepsilon(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) \Bigg] - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\
&= \frac{1}{1!}\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n \right) + \varepsilon(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n),
\end{aligned}
$$

gde je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ a $\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) \to 0$ kada $\Delta_i \to 0$, $i = \overline{1, n}$

Ako su stvarne greške $\Delta_i$, $i = \overline{1, n}$, dovoljno male veličine, onda se ostatal $\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ može zanemariti, pa je *stvarna greška* približne vrednost funkcije

(1) $$\boxed{\Delta = f - f^* = \Delta f \approx df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_i \,.}$$

Kako je

$$\boxed{|f - f^*| \approx \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \,,}$$

to je apsolutna greška približne vrednosti funkcije jednaka

(2) $$\boxed{\Delta f^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i^* \,,}$$

što predstavlja *opštu formulu za apsolutnu grešku* približne vrednosti funkcije.

Kako je

$$\Delta f^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| A x_i^* \,,$$

to je granica apsolutne greške približne vrednosti funkcije jednaka

(3) $$\boxed{A f^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| A x_i^* \,,}$$

što predstavlja *opštu formulu za granicu apsolutne greške* približne vrednosti funkcije.

Relativna greška približne vrednosti funkcije je

$$\delta f^* = \frac{\Delta f^*}{|f^*|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f^*|}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f^*\right| \Delta x_i^* = \tag{4}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i}\ln f^*\right| \delta x_i^*,$$

a granica relativne greške je

$$Rf^* = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f^*\right| Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i}\ln f^*\right| Rx_i^* . \tag{5}$$

## 7. GREŠKA ZBIRA I RAZLIKE

Neka je data funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n) = S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pretpostavimo da su nepoznate tačne vrednosti sabiraka $x_1, x_2, ..., x_n$ a da su umesto njih poznate približne vrednosti $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ kao i njihove stvarne greške $\Delta_i = x_i - x_i^*$, apsolutne greške $\Delta x_i^*$ i granice apsolutnih grešaka $Ax_i^*$, $i = \overline{1, n}$. Potrebno je oceniti grešku kada se umesto tačnih uzmu približne vrednosti sabiraka.

**Teorema 1**. Apsolutna greška zbira konačnog broja približnih brojeva je jednaka zbiru apsolutnih grešaka sabiraka.

*Dokaz*. Kako je $\dfrac{\partial S}{\partial x_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$, to je na osnovu opšte formule za grešku (6.2) približne vrednosti funkcije

(1) $$\Delta S^* = |S - S^*| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^* \ . \blacksquare$$

**Teorema 2**. Granica apsolutne greške zbira konačnog broja približnih brojeva je jednaka zbiru granica apsolutnih grešaka sabiraka.

*Dokaz*. Neposrednom primenom formule (6.3) dobijamo

(2) $$AS^* = \sum_{i=1}^{n} Ax_i^* \ . \square$$

Sada, po definiciji, nalazimo relativnu grešku zbira i granicu relativne greške zbira. Dakle,

$$\delta S^* = \frac{\Delta S^*}{|S^*|} \quad \text{i} \quad RS^* = \frac{AS^*}{|S^*|}, \quad S^* \neq 0 \ . \blacksquare$$

Iz formule (1), odnosno (2), sledi da apsolutna greška, odnosno granica apsolutne greške, zbira ne može biti manja od apsolutne greške, odnosno granice apsolutne greške, najnetačnijeg sabirka. Drugim rečima, tačnost rezultata je ograničena tačnošću najnetačnijeg podatka.

Pri sabiranju približnih brojeva različite tačnosti koriste se sledeća, praktična pravila:

1) uoče se sabirci (jedan ili njih više) s najvećom apsolutnom greškom, odnosno najvećom granicom apsolutne greške;

2) ostali sabirci se zaokrugle tako da bi imali jednu, dve ili, ređe, tri cifre više od najnetačnijeg sabirka (to su zaštitne cifre);

3) sada se saberu svi brojevi;

4) dobijeni rezultat se zaokrugli.

**Teorema 3**. Apsolutna greška razlike jednaka je zbiru apsolutnih grešaka umanjenika i umanjioca.

*Dokaz*. Kako je

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = -1 ,$$

to je na osnovu formule (6.2)

(3) $$\Delta R^* = \left|\frac{\partial R}{\partial x_1}\right| \Delta x_1^* + \left|\frac{\partial R}{\partial x_2}\right| \Delta x_2^* = \Delta x_1^* + \Delta x_2^* . \ \blacksquare$$

**Teorema 4**. Granica apsolutne greške razlike jednaka je zbiru granica apsolutnih grešaka umanjenika i umanjioca, tj.

(4) $$AR^* = Ax_1^* + Ax_2^* .$$

*Dokaz* je, zaista, jednostavan. □

Na osnovu svega rečenog možemo zaključiti sledeće: Apsolutna greška (granica apsolutne greške) algebarskog zbira konačnog broja približnih brojeva jednaka je zbiru apsolutnih grešaka (granica apsolutnih grešaka) sabiraka, tj.

(5) $$\Delta(x_1^* \pm x_2^* \pm \cdots \pm x_n^*) = \Delta x_1^* + \Delta x_2^* + \cdots + \Delta x_n^*$$

i

(6) $$A(x_1^* \pm x_2^* \pm \cdots \pm x_n^*) = Ax_1^* + Ax_2^* + \cdots + Ax_n^* .$$

## 8. GREŠKA PROIZVODA

**Teorema 1**. Relativna greška proizvoda konačnog broja približnih brojeva različitih od nule jednaka je zbiru relativnih grešaka tih brojeva.

*Dokaz*. Neka su $x_i^* > 0$, $i = \overline{1, n}$. Logaritmovanjem izraza

$$P^* = x_1^* \cdot x_2^* \cdot \cdots \cdot x_n^*$$

dobijamo $\ln P^* = \ln x_1^* + \ln x_2^* + \cdots + \ln x_n^*$ pa je na osnovu (7.1)

$$\Delta(\ln P^*) = \Delta(\ln x_1^*) + \Delta(\ln x_2^*) + \cdots + \Delta(\ln x_n^*).$$

Koristeći činjenicu da je $\Delta(\ln u) \approx |d \ln u| = \dfrac{\Delta u}{|u|}$ dobijamo

$$\frac{\Delta P^*}{|P^*|} = \frac{\Delta x_1^*}{|x_1^*|} + \frac{\Delta x_2^*}{|x_2^*|} + \cdots + \frac{\Delta x_n^*}{|x_n^*|},$$

ili

(1) $$\delta P^* = \delta x_1^* + \delta x_2^* + \cdots + \delta x_n^*. \blacksquare$$

Znak $|\cdot|$ smo pisali jer formula (1) važi i kada nije $x_i > 0$ za svako $i = \overline{1, n}$.

Dakle, relativna greška proizvoda jednaka je zbiru relativnih grešaka faktora.

Na potpuno isti način dobijamo

(2) $$RP^* = Rx_1^* + Rx_2^* + \cdots + Rx_n^*.$$

**Primer 1**. Izračunati proizvod približnih brojeva $x_1^* = 9.38$ i $x_2^* = 25.678$ i odrediti njegove sigurne cifre ako su sve cifre brojeva $x_1^*$ i $x_2^*$ sigurne u užem smislu.

*Rešenje*. Kako je $Ax_1^* = 0.005$ i $Ax_2^* = 0.0005$, to je

$$RP^* = Rx_1^* + Rx_2^* = \frac{0.005}{9.38} + \frac{0.0005}{25.678} = 0.0005525.$$

Kako je $P^* = x_1^* \cdot x_2^* = 240.85964$, to je

$$240.85964 \cdot 0.0005525 = 0.13 < 0.5 = \frac{1}{2} \cdot 10^0 = AP^*,$$

pa uzimamo $P^* = 241$, gde su sve cifre sigurne u užem smislu. ▲

## 9. GREŠKA KOLIČNIKA

**Teorema 1**. Relativna greška količnika približnih brojeva jednaka je zbiru relativnih grešaka deljenika i delioca.

*Dokaz*. Neka su $x_1$ i $x_2$ tačni a $x_1^*$ i $x_2^*$ odgovarajući približni brojevi. Pretpostavimo da su pozitivni. Potrebno je oceniti apsolutnu grešku i granicu apsolutne greške količnika. Logaritmovanjem izraza $Q^* = x_1^* / x_2^*$ dobijamo

$$\ln Q^* = \ln x_1^* - \ln x_2^*,$$

pa je na osnovu (7.3)

$$\Delta(\ln Q^*) = \Delta(\ln x_1^*) + \Delta(\ln x_2^*) .$$

Koristeći činjenicu da je $\Delta(\ln u) \approx |d \ln u| = \frac{\Delta u}{|u|}$ dobijamo

$$\frac{\Delta Q^*}{|Q^*|} = \frac{\Delta x_1^*}{|x_1^*|} + \frac{\Delta x_2^*}{|x_2^*|}$$

ili

(1) $$\delta Q^* = \delta x_1^* + \delta x_2^*,$$

što je i trebalo dokazati. ■

## 10. INVERZNI PROBLEM OCENE GREŠKE

U praksi se vrlo često pojavljuje i sledeći zadatak: Kolike moraju biti granice apsolutnih grešaka argumenata da granica apsolutne greške funkcije ne bi bila veća od unapred zadatog broja. Ovaj zadatak, zadatak određivanja potrebne tačnosti argumenata radi obezbeđivanja zadate tačnosti rezultata zove se *inverzni* ili *obratni* problem ocene greške. Dakle, treba odrediti $Ax_1^*, Ax_2^*, \ldots, Ax_n^*$ da bi bilo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot Ax_1^* + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot Ax_2^* + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot Ax_n^* \le \varepsilon \,, \tag{1}$$

gde je ε (ε > 0) unapred zadata tačnost rezultata. Za $n = 1$ iz (1) se dobija

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot Ax_1^* \le \varepsilon \,,$$

pa je

$$Ax_1^* \le \frac{\varepsilon}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|} \,.$$

Za $n > 1$ zadatak je, očigledno, neodređen; imamo samo jednu linearnu nejednačinu a $n$ nepoznatih: $Ax_1^*, Ax_2^*, \ldots, Ax_n^*$. Neodređenost eliminišemo postavljanjem dodatnih uslova. Najčešće se postupa na jedan od sledećih načina.

Ako pretpostavimo da je

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot Ax_1^* = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot Ax_2^* = \ldots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot Ax_n^* \,, \tag{2}$$

onda imamo tzv. *princip jednakih doprinosa*. Iz (1), uzimajući u obzir (2), dobijamo

$$Ax_i^* \le \frac{\varepsilon}{n \cdot \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|} \,, \quad i = \overline{1, n} \,. \tag{3}$$

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ veličine iste prirode (recimo, dužine), merene istim jedinicama, onda se može pretpostaviti da je

$$Ax_1^* = Ax_2^* = \ldots = Ax_n^* ; \tag{4}$$

tada imamo tzv. *princip jednakih granica apsolutnih grešaka*. Iz (1), uzimajući u obzir (4), dobijamo

(5) $$\boxed{Ax_i^* \le \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|},\ i=\overline{1,n}.}$$

Moguće je uzeti da je

(6) $$\boxed{Rx_1^* = Rx_2^* = \ldots = Rx_n^* (=\lambda),\ \text{tj. } \frac{Ax_1^*}{|x_1^*|} = \frac{Ax_2^*}{|x_2^*|} = \ldots = \frac{Ax_n^*}{|x_n^*|} (=\lambda),}$$

tada imamo tzv. *princip jednakih granica relativnih grešaka*. Iz (1), uzimajući u obzir (6), dobijamo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \lambda |x_1^*| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \lambda |x_2^*| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \lambda |x_n^*| \le \varepsilon,$$

odnosno

$$\lambda \le \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot |x_i^*|},$$

pa je

$$\frac{Ax_j^*}{|x_j^*|} \le \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i^*\right|},$$

i na kraju

(7) $$\boxed{Ax_j^* \le \frac{\varepsilon \cdot |x_j^*|}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i^*\right|},\quad j=\overline{1,n}.}$$