УВОД У НУМЕРИЧКУ МАТЕМАТИКУ (3. година) - јун 2005.

Задатак 1 Функције f и g дате су таблицом

x	1	$1,2$	$1,5$	$1,7$
$f(x)$	$-0,20$	$-0,10$	$0,35$	$0,75$
$g(x)$	$1,45$	$1,50$	$1,90$	$2,05$

Користећи Лагранжов интерполациони полином и рачунајући са 4 значајне цифре, приближно израчунати $g(\bar{x})$ где је $\bar{x}$ нула функције f.

Решење: Тачку $\bar{x}$ одређујемо инвертовањем таблице:

$f(x)$	$-0,20$	$-0,10$	$0,35$	$0,75$
x	1	$1,2$	$1,5$	$1,7$

Будући да нам је потребна само вредност Лагранжовог полинома у тачки 0, а не и сам полином, њу одређујемо користећи стандардну схему. Након краћег рачуна, добијамо: $\bar{x} = 1,335$ (4 значајне цифре). Слично, добијамо и $g(1,335) = 1,667$.
Напомена: Уколико се ради уобичајеним поступком, који подразумева одређивање експлицитног облика Лагранжовог полинома, тада се из прве (инвертоване) таблице добија: $L_3^{f^{-1}}(f(x)) = 2,345f(x)^3 - 2,542f(x)^2 + 1,073f(x) + 1,335$, а из друге $L_3^g(x) = -4,762x^3 + 19,79x^2 - 25,94x + 12,37$.

Задатак 2 Одредити оптималан корак за нумеричко диференцирање по формули $f'''(x_0 - \frac{h}{2}) = \frac{\Delta^3 f_{-1}}{h^3}$, под претпоставком да се вредности функције f могу рачунати за тачношћу ε.

Решење: Имајући у виду таблицу коначних разлика добијамо $\Delta^3 f_{-1} = \Delta^2 f_0 - \Delta^2 f_{-1} = ... = f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}$. Одакле следи:

$$\frac{f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}}{h^3} = \frac{f(\bar{x} + \frac{5h}{2}) - 3f(\bar{x} + \frac{3h}{2}) + 3f(\bar{x} + \frac{h}{2}) - f(\bar{x} - \frac{h}{2})}{h^3},$$

где је $x_0 = \bar{x} + \frac{h}{2}$. Тејлоровим развојем функције f у околини тачке $\bar{x}$, закључно са четвртим изводом, добијамо $\Delta^3 f_{-1} = f'''(\bar{x}) + hf''''(\xi)$, $\xi \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + 2h]$. Даље, укупна грешка (R) једнака је збиру грешке методе $(R_1 = hM_4)$ и грешке направљене приликом рачуњања вредности функције $\left(R_2 = \frac{\varepsilon + 3\varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon}{h^3} = \frac{8\varepsilon}{h^3}\right)$. Минимизацијом функције $R(h)$ долазимо до оптималног корака $h = \sqrt[4]{\frac{24\varepsilon}{M_4}}$.

Задатак 3 Методом просте итерације одредити сва позитивна решења једначине $(x-1)^2 - \sin x = 0$. Рачунати са 4 децимале.

Решење: Анализом функције $f(x) = (x-1)^2 - \sin x$ закључујемо да она има две (позитивне) нуле: $x_1^* \in (0,2, \quad 0,4)$ и $x_2^* \in (1,7, \quad 2)$. Након што једначину $f(x) = 0$ напишемо у облику $x = \frac{x^2 - \sin x + 1}{2}$ закључујемо да за функцију $\varphi(x) = \frac{x^2 - \sin x + 1}{2}$ важи $|\varphi'(x)| < 0,29 = q < 1$, $x \in (0,2, \quad 0,4)$. Ако за почетну тачку итеративног низа одаберемо $x_0 = 0,4$, у четвртој итерацији долазимо до решења $x_4 = 0,3862$, те је $x_1^* = 0,386$. Сличним поступком добијамо и $x_2^* = 1,962$.
Напомена 1: Није било неопходно користити критеријум заустављања за методу итерације јер је у задатку речено са колико се децимала рачуна. Итеративни процес се завршава када се две узастопне апроксимације поклопе.

Задатак 4 Методом произвољног вектора, рачунајући са 3 децимале, приближно одредити највећу по модулу сопствену вредност и њој одговарајући сопствени вектор матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

За почетни вектор узети $v_0(2,3,4)^T$.

Решење: Примењујући познати итеративни поступак добијамо

$$v_1=Av_0=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40\\ 94\\ 148 \end{pmatrix},\ \lambda_1^{(1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{40}{2}+\frac{94}{3}+\frac{148}{4}\right)=29,444.$$

$$v_2=Av_1=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 40\\ 94\\ 148 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1344\\ 3036\\ 4728 \end{pmatrix},\ \lambda_1^{(2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1344}{40}+\frac{3036}{94}+\frac{4728}{148}\right)=32,615.$$

$$\dots$$

$$v_{11}=Av_{10}=\begin{pmatrix} 50281,344\\ 113867,424\\ 177453,504 \end{pmatrix},\ \lambda_1^{(11)}=\lambda_1^{(10)}=32,234.$$

Дакле, тражена спствена вредност је $\lambda_1=32,23$, док за њој одговарајући сопствени вектор можемо узети неки вектор који је колинеаран вектору из последње итерације, на пример, $v(1,\quad 2,26,\quad 3,53)$.

Напомена 1: Након одређеног броја итерација, координате вектора постају изузетно велики бројеви, те се он замењује неким њему колинеарним вектором. У зависности од тога, укупан број итерација може варирати.

Напомена 2: Могла се користити и схема: $A, A^2 A^4, A^8, v_8=A^8v_0$ итд.

Напомена (везана за све задатке изузев другог): У зависности од тога да ли се рачунања врше помоћу обичног дигитрона, неког програмабилног или, пак, коришћењем неког озбиљнијег софтвера, од случаја до случаја, може доћи до незнатног неподударања резултата (најчешће на последњој децимали).