УВОД У НУМЕРИЧКУ МАТЕМАТИКУ (3. година) - септембар 2005.

Задатак 1 На сегменту $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ табелирати функцију $f(x) = x^2 e^x$ максималним кораком h који дозвољава линеарну интерполацију са грешком не већом од $\varepsilon = 10^{-2}$ и израчунати $f\left(\dfrac{h}{2}\right)$. Рачунати са 3 значајне цифре.

Решење: Максималан корак h задовољава неједнакост $h \leq \sqrt{\dfrac{8\varepsilon}{M_2}}$. Није тешко показати да је функција $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$ позитивна и да монотоно расте на посматраном сегменту, одакле следи $M_2 = f''\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 7,01$. Даље је $h \leq 0,107$. Максималан корак који задовољава поретходну неједнакост, а којим се правилно покрива сегмент је $h = 0,1$.

Вредност $f(0,05)$ рачунамо првим Њутновим интерполационим полиномом који формирамо користећи коначне разлике закључно са првим редом (јер се тражи линеарна интерполација). Након краћег рачуна, добијамо $f(0,05) \approx P_1^I(0,05) = 0,00555$.

Задатак 2 Извести квадратурну формулу облика

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)dx \approx Af\left(\frac{1}{4}\right) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf\left(\frac{3}{4}\right),$$

тако да она буде тачна за полиноме што је могуће већег степена. Применом добијене формуле приближно израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sin x + 5}dx$. Рачунати са 4 децимале.

Решење: Уврштавајући редом $f(x) = 1$, $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$ у подинтегралну функцију долазимо до система од три линеарне једначине са непознатим A, B и C. Решење система је $A \approx 0,5388, B \approx -0,2381$ и $C \approx 0,3315$.

Даље је

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sin x + 5}dx \approx 0,5388 \cdot 0,1906 - 0,2381 \cdot 0,1825 + 0,3315 \cdot 0,1760 = 0,1176.$$

Задатак 3 Њутновом методом, са тачношћу $\varepsilon = \dfrac{1}{2}10^{-3}$, одредити сва решења једначине $\mathrm{sh}x^2 + x = 1$.

Решење: Анализом функције $f(x) = \mathrm{sh}x^2 + x - 1$ закључујемо да она има две реалне нуле: $x_1^* \in [-1,5,\ -1]$ и $x_2^* \in [0,5,\ 1]$.

Одредимо x_1^*:

a) Провера услова за примену методе:

1. Функција f је очигледно непрекидно-диференцијабилна;
2. Функција f је различитог знака на крајевима интервала $[-1,5,\ -1]$, наиме, $f(-1,5) > 0, f(-1) < 0$.
3. За свако $x \in [-1,5,\ -1]$ постоји $f''(x)$.

   Детаљнијом анализом првог и другог извода функције f закључујемо да су испуњена још два услова:
4. f' не мења знак и $f'(x) \neq 0$ на посматраном сегменту.
5. f'' не мења знак на посматраном сегменту.

   Напослетку, ако одаберемо $x_0 = -1,3$, добијамо:
6. $f(-1,3)f''(-1,3) > 0$.

б) Критеријум заустављања:

Итеративни процес се завршава када разлика између две узастопне итерације задовољи следећу неједнакост $|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\dfrac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$. Будући да је f' негативна растућа функција на посматраном сегменту (провери се), закључујемо да важи $m_1 = |f'(-1)| \approx 2,0862$. На сличан начин добијамо и $M_2 = |f''(1,5)| \approx 51,8136$, те је $|x_n - x_{n-1}| \leq 0,0063$.

в) Итерација:

Користећи формулу $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ и узимајући за почетну вредност $x_0 = -1,3$ у другој итерацији долазимо до решења $x_1^* = -1,244$.

На сличан начин добијамо и $x_2^* = 0,614$.
Напомена 1: Први и трећи услов за примену Њутнове методе су увек испуњени и њихово проверавање није неопходно на писменом испиту.

Задатак 4 Гаус–Зајделовом итеративном методом, са тачношћу $\varepsilon = \dfrac{1}{2}10^{-4}$, решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcrr}
4,40x_1 & - & 13,49x_2 & - & 1,55x_3 & + & 0,58x_4 & = & - & 38,60\\
0,11x_1 & + & 0,13x_2 & + & 7,15x_3 & + & 0,17x_4 & = & & 17,02\\
0,85x_1 & + & 6,95x_2 & + & 0,98x_3 & + & 0,05x_4 & = & & 51,70\\
0,63x_1 & + & 1,01x_2 & + & 15,10x_3 & + & 8,19x_4 & = & & 120,68.
\end{array}$$

Решење: Уколико једначине означимо са (1) – (4), тада се систем може трансформисати у њему еквивалентан систем са дијагонално доминантним члановима на следећи начин:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrlr}
6,10x_1 & + & 0,41x_2 & + & 0,41x_3 & + & 0,68x_4 & = & 64,80 & & 2\cdot(3)+(1)\\
0,85x_1 & + & 6,95x_2 & + & 0,98x_3 & + & 0,05x_4 & = & 51,70 & & (3)\\
0,74x_1 & + & 1,14x_2 & + & 22,25x_3 & + & 8,34x_4 & = & 137,70 & & (2)+(4)\\
0,41x_1 & + & 0,75x_2 & + & 0,80x_3 & + & 7,85x_4 & = & 86,64 & & -2\cdot(2)+(4).
\end{array}$$

Изражавањем непознате x_i из i-те једначине преко преосталих непознатих ($i = 1, ..., 4$) добијамо припремљен систем за примену Гаус-Зајделове методе. Познатим итеративним поступком долазимо до решења $(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx (9,000,\ 6,000,\ 1,900,\ 9,800)$.