НУМЕРИЧКА АНАЛИЗА 2 - септембар 2005.

Задатак 1 Рунге–Кута методом 2. реда, са тачношћу 10^{-4}, одредити $y(-0,3)$ за Кошијев проблем

$$y' = e^{x+y} - 1; \quad y(x_0) = 0,1, \quad y'(x_0) = 0.$$

Решење: Из $y'(x_0) = e^{x_0+y(x_0)} - 1$ следи $x_0 = -0,1$. Узмимо најпре корак $h = -0,1$. Применом формула Рунге–Кута 2. реда добијамо $y(-0,3) = 0,11780$. Понављањем исте процедуре са кораком $h = -0,05$ добијамо $y(-0,3) = 0,11771$. Подстимо се да је оцена грешке код метода Рунге–Кута реда p дата са $|y - y_h^*| \approx \dfrac{|y_h^* - y_{2h}^*|}{2^p - 1}$, где је y вредност функције у некој тачки, док су y_h^* и y_{2h}^* вредност израчунате са кораком h, односно $2h$. У нашем случају је $\dfrac{|0,11780 - 0,11771|}{3} < 10^{-4}$, што ће рећи да је испуњена тражена тачност и да је тражено решење $y(-0,3) \approx 0,1177$.

Задатак 2 Приближно решити гранични проблем

$$\begin{cases} y'' + 2xy' - 4y &= 2\cos x \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

диференцијском схемом тачности $O(h^2)$, са кораком $h = 0,2$ и рачунајући са 4 децимале.

Решење: Уврштавањем апроксимација првог и другог извода

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

у диференцијалну једначину, те коришћењем граничних услова, долазимо до система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_0 & & & & & = & 1 \\ 24y_0 & - & 54y_1 & + & 26y_2 & = & 1,9601 \\ 23y_1 & - & 54y_2 & + & 27y_3 & = & 1,8421 \\ 22y_2 & - & 54y_3 & + & 28y_4 & = & 1,6507 \\ 21y_3 & - & 54y_4 & + & 29y_5 & = & 1,3934 \\ & & & & y_5 & = & 2. \end{array}$$

С обзиром да се ради о тродијагоналном систему једначина, решавамо га такозваном методом "прогонке"[1]. Добијамо

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,000	0,819	0,854	1,078	1,468	2,000

Задатак 3 Имплицитном схемом одредити приближно решење мешовитог проблема

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 0,2 \\ u(x,0) &= 0 \\ u(0,t) &= \dfrac{t}{4} \\ u(2,t) &= 0 \end{cases}$$

рачунајући са 4 децимале и са корацима $h = 0,25$ и $\tau = 0,1$.

[1] Што би рекли Руси, док је она у западној литератури позната као Томасов алгоритам.

Решење: Пошто се ради о имплицитној методи вредност параметра σ је 1. Најпре се провери да су испуњени услови нултог реда и услов стабилности.[2] Затим, коришћењем познатих формула, долазимо до решења које је дато у виду доње табеле.

$i\backslash j$	0	1	2
0	0,000	0,025	0,050
1	0,000	0,034	0,089
2	0,000	0,048	0,095
3	0,000	0,063	0,120
4	0,000	0,074	0,137
5	0,000	0,079	0,142
6	0,000	0,073	0,127
7	0,000	0,051	0,084
8	0,000	0,000	0,000

Нулта колона се добија из почетног услова (код овог задатка он је тривијалан), а нулта и осма врста из првог, односно другог, граничног услова. Преостале вредности у табели рачунамо истом методом као и у претходном задатку (коју примењујемо 2 пута - за $t = 0,1$ и $t = 0,2$).

Задатак 4 Методом колокације, рачунајући са 4 децимале, одредити приближно решење интегралне једначине

$$u(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xu(t)dt = x^2$$

ако су тачке колокације $x_1 = 0,25, x_2 = 0,5$ и $x_3 = 0,75$, а базисне функције

$$\varphi_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решење: Приближно решење тражимо у облику $v(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i\varphi_i$. Функција грешке је

$$R(x, c_1, c_2, c_3) = v(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xv(t)dt - x^2,$$

односно

$$R(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2x + c_3x^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 x(c_1 + c_2x + c_3x^2)dt - x^2$$

и она мора бити једнака нули у тачкама колокације, то јест $R(0,25,\ c_1, c_2, c_3) = R(0,50,\ c_1, c_2, c_3) = R(0,75,\ c_1, c_2, c_3) = 0$. Ово последње нас доводи до система од три линеарне једначине са непознатим c_1, c_2 и c_3. Његовим решавањем добијамо $c_1 = 0,000,\ c_2 = 0,222,\ c_3 = 1,000$. Дакле, $u(x) \approx v(x) = 0,000 + 0,222x + 1,000x^2$.

[2] Иначе одмах 3 поена мање.