АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА – 1. колоквијум 2006-07.

Теорија

1. а) Дефинисати сабирање вектора.
   б) Доказати да дефиниција не зависи од избора вектора представника.
2. а) Навести формулу за двоструки векторски производ.
   б) Ако је ABC једнакостранични троугао ивице a израчунати $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{CA}$.
3. Написати и доказати формулу за растојање тачке $M(x_0, y_0)$ од праве $ax + by + c = 0$.

Задаци

1. Нека тачка D припада страници AC, а тачка E тежишној дужи AA_1 троугла $\triangle ABC$. Уколико важи $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{AE}{EA_1} = \dfrac{2}{3}$, методама векторске геометрије доказати да су тачке B, E и D колинеарне.

2. Дати су вектори $\overrightarrow{a} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (0, 2, 3)$ и $\overrightarrow{c} = (-2, 1, \lambda)$.

   а) Одредити вредност параметра λ за коју су дати вектори линеарно зависни.

   б) За $\lambda = 1$ израчунати запремину тетраедра конструисаног над векторима $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

3. Дат је троугао $\triangle ABC$. Нека су M, N и P тачке које припадају редом страницама AB, BC и CA, за које важи: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{1}{5}$. Одредити однос површина троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle MNP$.

4. Доказати да за произвољне векторе $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbf{E}^3$ важи $\big((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\big) \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) = 2[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$.

5. Дат је тетраедар $ABCD$. Афини координатни систем $Axyz$ има почетак у A и координатне векторе $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$. Афини координатни систем $Bx'y'z'$ има почетак у B и координатне векторе $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{BG}$, где су E, F и G редом средишта дужи AB,AC и AD. Изразити координате (x, y, z) у координатном систему $Axyz$ преко координата (x', y', z') у координатном систему $Bx'y'z'$ произвољне тачке.

6. Одредити тачку која је симетрична тачки $A(2, 2, 2)$ у односу на раван $\alpha : 2x - y + z + 2 = 0$.

7. Одредити праву која садржи тачку $A(0, 0, 7)$, паралелна је равни $\alpha : x + 2y + 3z + 2006 = 0$ и сече праву $p : x + 2 = y + 2 = z - 1$.