РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ИЗ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ - јануар 2006.

Задатак 1. Нека су $ABCD$ и $BKMN$ два квадрата у равни таква да су тачке A, B и K неколинеарне. Методама векторске алгебре доказати да је тежишна линија BP троугла ABK нормална на праву CN.
Решење: Како је $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BK})$ и $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BC}$, важи: $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC})$. Пошто је $BK \perp BN$ и $BA \perp BC$, следи да $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BN} = 0$. Takође важи $\measuredangle ABN = \measuredangle ABK + \frac{\pi}{2} = \measuredangle KBC$, па је $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BN}|\cdot cos(\measuredangle ABK + \frac{\pi}{2}) - |\overrightarrow{BK}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot cos(\measuredangle ABK + \frac{\pi}{2})) = 0$. Дакле, $BP \perp CN$, што је и требало доказати.

Задатак 2. Одредити једначину параболе која садржи тачке $A(0,-\frac{3}{2})$ и $B(0,-4)$, и чија је директриса права $2x - y + 1 = 0$.
Решење:Нека је жижа параболе $F(a,b)$. Једначина фамилије парабола са директрисом $2x-y+1=0$ је: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{(2x-y+1)^2}{5}$. Тачке $A(0,-\frac{3}{2})$ и $B(0,-4)$ припадају параболи, што даје систем једначина по a и b:

$$a^2 + (-\frac{3}{2} - b)^2 = \frac{5}{4},$$
$$a^2 + (-4-b)^2 = 5,$$

који има два решења: $a = 1, b = -2$ и $a = -1, b = -2$. Дакле, постоје две параболе које задовољавају услове задатка:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - \frac{(2x-y+1)^2}{5} = 0,$$

и

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 - \frac{(2x-y+1)^2}{5} = 0.$$

Задатак 3. Одредити једначину правог кружног цилиндра чија је оса $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ и који додирује раван $x - 2y + 2z + 3 = 0$.
Решење: Како цилиндар додирује раван $\alpha : x - 2y + 2z + 3 = 0$, полупречник цилиндра r је једнак растојању било које тачке са осе $o : \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ до равни α. Тачка $M(0,2,1)$ припада оси цилиндра, па је $r = d(M,\alpha) = \frac{1}{3}$. Нека је $N(x,y,z)$ произвољна тачка са цилиндра. Тада је $\frac{1}{3} = r = d(N,o) = \frac{|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{o}|}{|\overrightarrow{o}|}$, где је $\overrightarrow{o} = (-2,1,2)$ вектор осе. Једначина цилиндра је:

$$(2y - z - 3)^2 + (-2x - 2z + 2)^2 + (x + 2y - 4)^2 = 1$$

.

Задатак 4. 4. Одредити формуле афине трансформације равни која тачку $A(1,1)$ пресликава у тачку $A_1(3,2)$, а тачку $B(5,1)$ и праву $x - 2y = 0$ оставља непокретним.Одредити инваријантне тачке ове афине трансформације.
Решење: Тачка $A(1,1)$ се пресликава у тачку $A_1(3,2)$:

$$a_{11} + a_{12} + x_0 = 3 \tag{1}$$

$$a_{21} + a_{22} + y_0 = 2 \tag{2}$$

.

Тачка $B(5,1)$ се пресликава у саму себе:

$$5a_{11} + a_{12} + x_0 = 5 \tag{3}$$

$$5a_{21} + a_{22} + y_0 = 1 \tag{4}$$

. Права $x - 2y = 0$ је таакође непокретна:

$$\frac{a_{11} - 2a_{21}}{1} = \frac{a_{12} - 2a_{22}}{-2} = \frac{x_0 - 2y_0}{0}. \tag{5}$$

Решавањем система (1)–(5) добијамо: $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{12} = -\frac{1}{2}, a_{21} = -\frac{1}{4}, a_{22} = \frac{3}{4}, x_0 = 3, y_0 = \frac{3}{2}$. Афина трансформација је одређена формулама:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x - y) + 3,$$
$$y_1 = \frac{1}{4}(-x + 3y) + \frac{3}{2}.$$