ANALITIČKA GEOMETRIJA (Junski rok) - 6. Jun 2005.
Zadatke i rešenja ispisao - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Dat je proizvoljan trougao ABC i tačke M, N i P takve da važi: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CP}$. Dokazati da su tačke M, N i P kolinearne.

Rešenje : Iz $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CP}$ imamo $\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}$, te je $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}} = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1$. Ovo dalje po Menelajevoj teoremi znači da su tačke M, N i P kolinearne, što je i trebalo dokazati. □

ZADATAK 2.

Zadatak : Odrediti jednačinu krive drugog reda koja sadrži tačke $A(-2,-1)$ i $B(0,-2)$ i kojoj su prave $x+y+1 = 0$ i $x-y+1=0$ ose simetrije. Izometrijskom transformacijom tu krivu svesti na kanonski oblik i napisati formule te transformacije.

Rešenje : Presek osa je $C(-1,0)$ i to mora biti centar krive. Za centar je $a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0$ i $a_{12}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0$ pri čemu su a_{ij} standardni koeficijenti jednačine krive drugog reda, a (x_C, y_C) koordinate centra. Dobijamo $a_{13} = a_{11}$ i $a_{23} = a_{12}$, te krivu :

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{11}x + 2a_{12}y + a_{33} = 0$$

Iz $A \in \Gamma$ je $2a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0$, dok iz $B \in \Gamma$ sledi $-4a_{12} + 4a_{22} + a_{33} = 0$. Kako je A na jednoj od osa to poslednju jednačinu tražimo tako što preslikamo tačku A preko jedne od osa. Na primer $(1,-1) \in \Gamma$. Ovo daje $3a_{11} - 4a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0$. Rešavanjem sistema uz $a_{12} = 1$, dobijamo $a_{22} = 2$, $a_{33} = -4$, $a_{11} = 2$,te $\Gamma : 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$. Ostaje još svodjenje na kanonski oblik. $\chi(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$ daje sopstvene vrednosti 1 i 3 kojima odgovaraju normirani sopstveni vektori $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, te se uvodi adekvatna smena i tako dalje... □

ZADATAK 3.

Zadatak : Odrediti jednačinu cilindra koji sadrži krug poluprečnika $\sqrt{2}$ u ravni $x+y+z=3$ sa centrom u $(1,1,1)$, ako on sadrži i presek ravni $x+y-z+1=0$ i $5x-4y+z+2=0$.

Rešenje : Presek navedenih ravni je prava $x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, koja seče $x+y+z=3$ u $(0,1,2)$, što pripada datom krugu, te traženi cilindar postoji! Njegova generatrisa ima pravac $(1,2,3)$, dok je direktrisa $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$, $x+y+z=3$. Sada će (x,y,z) biti na cilindru ukoliko postoji (x_0,y_0,z_0) na datom krugu tako da je $(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \sim (1,2,3)$. Ovo dovodi do sistema jednačina:

$$(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2 = 2,\ x_0+y_0+z_0 = 3,\ x_0 = x+k,\ y_0 = y+2k,\ z_0 = z+3k,$$

pri čemu treba eliminisati parametre x_0, y_0, z_0 i k. Najpre je $x+y+z+6k = 3$, odakle $k = \dfrac{3-x-y-z}{6}$, te $x_0 = \dfrac{5x-y-z+3}{6}$, $y_0 = \dfrac{-2x+4y-2z+6}{6}$, $z_0 = \dfrac{-3x-3y+3z+9}{6}$. Ovo na kraju dovodi do konačnog rešenja, jednačine cilindra:

$$(5x-y-z-3)^2 + (-2x+4y-2z)^2 + (-3x-3y+3z+3)^2 = 72 \quad \square$$

ZADATAK 4.

Zadatak : U četvorodimenzionom prostoru date su prave $p : \dfrac{x_1-3}{3} = \dfrac{x_2-2}{1} = \dfrac{x_3-1}{-1} = \dfrac{x_4}{-3}$ i $q : x_1 - 1 = x_2 - 2 = x_3 - 3 = x_4 - 4$. Odrediti ravan najmanje dimenzije koja sadrži prave p i q, a zatim ispitati medjusobni položaj te ravni i dvodimenzione ravni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, $x_3 = 2$.

Rešenje : $P(3,2,1,0) \in p$, $Q(1,2,3,4) \in q$, te pored pravaca $u_p(3,1,-1,-3)$ i $u_q(1,1,1,1)$ tražena ravan mora sadržati i pravac $\overrightarrow{PQ}(-2,0,2,4)$, no $\overrightarrow{PQ} = u_q - u_p$, te je tražena ravan dvodimeziona sa pravcima u_p i u_q i tačkom $(3,2,1,0)$. U parametarskom obliku to je:

$$x_1 = 3+t+3s,\ x_2 = 2+t+s,\ x_3 = 1+t-s,\ x_4 = t-3s.$$

Presecimo ovu ravan sa $x_1+x_2+x_3+x_4 = 2$, $x_3 = 2$. Dobijamo $x_1+x_2+x_4 = 0$ i $x_3 = 2$, odnosno $3+t+3s+2+t+s+t-3s = 0$ i $1+t-s = 2$. Dalje je to $3t+s+5 = 0$ i $t = s+1$, što dovodi do $t=-1$ i $s=-2$. Dakle ravni se seku u tački $(-4,-1,2,5)$. □