ANALITIČKA GEOMETRIJA - 20. Septembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić i Zoran Stanić

ZADATAK 1.

Zadatak : Dat je proizvoljan trougao ABC površine P. Neka su tačke A_1, B_1 i C_1 takve da važi $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Kolika je površina trougla $A_1B_1C_1$?

Rešenje : $2P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, 2X = |\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}|$
$\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1} = (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) \times (\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \times (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = -4\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
Dakle tražena površina je $7P$! $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Data je hiperbola $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$.

a) Odrediti par konjugovanih dijametara od kojih je jedan paralelan pravoj $l : x - 3y - 4 = 0$.

b) Odrediti ugao pod kojim se hiperbola i parabola data jednačinom $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$ seku u koordinatnom početku.

Rešenje :

a) Koeficijent pravca dijametra paralelnog datoj pravoj jednak je koeficijentu pravca te prave i iznosi $k_1 = \frac{1}{3}$. Koristeći poznatu jednakost koju zadovoljavaju koeficijenti pravaca konjugovanih dijametara dobijamo $1 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - k_1k_2 = 0$, odakle sledi $k_2 = 1$. Traženi dijametri se dalje jednostavno dobijaju korišćenjem formule $f'_x(x, y) + k_i f'_y(x, y) = 0$, $i = 1, 2$, gde je $f(x, y)$ jednačina date hiperbole. Njihove jednačine su: $5x - 5y - 4 = 0$ i $x - 3y - 2 = 0$.

b) Traženi ugao jednak je uglu koji zaklapaju tangente (u tački $(0, 0)$) dveju krivih. Korišćenjem formule za tangentu krive drugog reda ($f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$), dobijamo njihove jednačine: $t_h : y = -x$ i $t_p : y = x$. Dakle, seku se pod pravim uglom. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Odrediti sve ravni koje sadrže tačku $(1, 2, 3)$ i dodiruju sfere $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{2}$ i $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Rešenje : $A(1, 2, 3),\ d(\pi, A) = 0;\ B(0, 0, 0),\ d(\pi, B) = \frac{1}{\sqrt{2}};\ C(1, 1, 1),\ d(\pi, C) = \frac{1}{\sqrt{2}};$
Neka je tražena ravan $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Tada je
$a + 2b + 3c + d = 0,\ 2d^2 = a^2 + b^2 + c^2,\ 2(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Iz poslednje dve je $(a + b + c + d)^2 = d^2$, odnosno $(a + b + c)(a + b + c + 2d) = 0$.
$1^o)\ a + b + c = 0$
$c = -(a + b) \Rightarrow 2a + b = d$
$2(2a + b)^2 = a^2 + b^2 + (a + b)^2,\ 8a^2 + 8ab + 2b^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2 \Rightarrow (a = 0) \vee ((a + b) = 0)$
$a = 0 \Rightarrow c = -b,\ d = b \Rightarrow \pi : y - z + 1 = 0$ što (utvrdjujemo proverom) jeste rešenje!
$a + b = 0 \Rightarrow b = -a,\ c = 0,\ d = a \Rightarrow \pi : x - y + 1 = 0$ što (utvrdjujemo proverom) jeste rešenje!
$2^o)\ a + b + c + 2d = 0$
$a = -(b + c + 2d),\ 2b + 3c + d = b + c + 2d \Rightarrow b + 2c = d,\ a = -(b + c + 2b + 4c) \Rightarrow a = -3b - 5c$
$2(b + 2c)^2 = (3b + 5c)^2 + b^2 + c^2,\ 2b^2 + 8bc + 8c^2 = 10b^2 + 30bc + 26c^2,\ 4b^2 + 11bc + 9c^2 = 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow a = d = 0 \Rightarrow$ nema rešenja!
Dakle tražene ravni su $y - z + 1 = 0$ i $x - y + 1 = 0$! $\square$

ZADATAK 4.

Zadatak : U četvorodimenzionom euklidskom prostoru odrediti pravu koja sadrži tačku $(0, 1, 2, 3)$, normalna je na pravu $p : \dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{x_2 - 2}{1} = \dfrac{x_3 - 3}{2} = \dfrac{x_4 - 4}{1}$, seče pravu $q : \dfrac{x_1 + 1}{3} = \dfrac{x_2 + 1}{2} = \dfrac{x_3 + 3}{1} = \dfrac{x_4 - 7}{0}$, a sa pravom $r : x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ gradi ugao od $\arccos \dfrac{1}{6}$.

Rešenje : $u_x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$
$p \perp x \Rightarrow 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = 0;\ \cos\angle(r, x) = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = |a| \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{|a|}{3}$
Iz prethodnog imamo $a_1 + a_3 = \frac{-|a|}{3},\ a_2 + a_4 = \frac{2|a|}{3}$. Pogledajmo presek x i q
$a_1t = 3s - 1,\ a_2t + 1 = 2s - 1,\ a_3t + 2 = s - 3,\ a_4t + 3 = 7$
Saberimo posebno neparne, a posebno parne jednačine i dobijamo
$\frac{-|a|}{3}t + 2 = 4s - 4,\ \frac{2|a|}{3}t + 4 = 2s + 6$, odakle je $s = 1$. Dakle $x \cap q = \{(2, 1, -2, 7)\}$, odakle je x prava koja spaja $(0, 1, 2, 3)$ i $(2, 1, -2, 7)$, odnosno $x : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - 2}{-2} = \frac{x_4 - 3}{2}$, što na kraju proverom utvrdjujemo da ispunjava sve