РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ИЗ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ - октобар 2005.

1. Дат је паралелограм $ABCD$. Тачка F је средиште странице BC, а тачка E пресек правих AF и DB. У равни датог паралелограма изабрана су два афина координатна система: систем Axy, са почетком у тачки A и координатним векторима $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ и систем $Ex'y'$, са почетком у тачки E и координатним векторима $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{EF}$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у односу на систем Axy помоћу координата (x',y') исте тачке у односу на систем $Ex'y'$ и одредити координате тачке C у оба координатна система.

Решење: Одредимо прво координате почетка E система $Ex'y'$ у односу на систем Axy.

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AF}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=\alpha(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=\alpha(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\beta(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(1-\beta)\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}.$$

Изједначавањем десних страна ових једнакости и коришћењем линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ добијамо систем

$$\alpha+\beta-1=0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha-\beta=0,$$

чија су решења $\alpha=\frac{2}{3}$ и $\beta=\frac{1}{3}$. Одавде следи да је $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, тј. почетак система $Ex'y'$ у односу на систем Axy има координате $E(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.
Даље,

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD},$$

тј. координатни вектори $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{EF}$ система $Ex'y'$ у односу на систем Axy имају координате $\overrightarrow{EB}(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ и $\overrightarrow{EF}(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$.
Следи да су тражене везе између координата у ова два система дате једначинама

$$x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y',$$

$$y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x'+\frac{1}{6}y'.$$

Даље, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, тј. координате тачке C у односу на систем Axy су $C(1,1)$, а сменом у претходном систему једначина за $x=1$ и $y=1$ добијамо да су координате тачке C у односу на систем $Ex'y'$ $C(-1,2)$. $\square$

2. Одредити формуле хомотетије са позитивним коефицијентом, која јединични круг са центром у координатном почетку пресликава у описани круг троугла чија су темена $A(1,0)$, $B(3,2)$ и $C(-1,2)$. Одредити темена троугла који се добијеном хомотетијом пресликава у троугао ABC.

Решење: Нека је k круг са центром у $O(0,0)$, полупречника $r=1$, а k' круг описан око троугла ABC, са центром у O' и полупречником r'. Троугао ABC је правоугли троугао (прав угао код темена A), па је O' средиште странице BC, тј. $O'(1,2)$ и полупречник круга k' је $r'=\frac{1}{2}BC=2$. Пошто се тражи хомотетија са позитивним коефицијентом и $r'=2r$ следи да је коефицијент хомотетије 2. Нека је центар хомотетије $H(X,Y)$. Тада је $\overrightarrow{HO'}=2\overrightarrow{HO}$, тј. $(1-X,2-Y)=2(-X,-Y)\Longrightarrow X=-1$ и $Y=-2$. Одредимо још формуле тражене хомотетије. Нека хомотетија(са центром у $H(-1,-2)$ и коефицијентом 2) пресликава произвољну тачку $M(x,y)$ у тачку $M'(x',y')$.Тада је $\overrightarrow{HM'}=2\overrightarrow{HM}\Longrightarrow$ $(x'+1,y'+2)=2(x+1,y+2)$, тј. формуле тражене хомотетије су

$$x'=2x+1,$$

$$y'=2y+2.$$

Нека је троугао ABC слика троугла $A_0B_0C_0$ при добијеној хомотетији. Тада се координате темена A_0 добијају из претходног система једначина за $x'=1$ и $y'=0$, тј. $A_0(0,-1)$ и аналогно $B_0(1,0)$ и $C_0(-1,0)$. $\square$

3. Једначину површи другог реда

$$6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz + 36x - 36y = 0$$

изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формуле те трансформације.

Решење: Матрица квадратне форме је

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

а карактеристични полином је $\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)$.Сопственим вредностима $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$ одговарају сопствени вектори $\overrightarrow{v_1}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \overrightarrow{v_2}(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{v_3}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. После промене координатног система

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1, \\ y &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1, \\ z &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1, \end{aligned}$$

добија се да крива има једначину $3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2 + 36y_1 - 36z_1 = 0$, тј. $3x_1^2 + 6(y_1+3)^2 + 9(z_1-2)^2 - 90 = 0$. На крају, транслацијом координатног система тако да је $x_2 = x_1, y_2 = y_1 + 3$ и $z_2 = z_1 - 2$, добија се канонски облик једначине дате површи

$$3x_2^2 + 6y_2^2 + 9z_2^2 = 90.$$

Формуле трансформације су

$$\begin{aligned} x &= -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}z_2, \\ y &= \quad \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}z_2, \\ z &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}z_2. \end{aligned}$$

4. Одредити једначину тродимензионе равни у петодимензионом афином простору која садржи тачке $A_1(-1, 2, 0, 0, 4), A_2(1, 1, 1, 1, 1), A_3(0, 1, 3, -1, 1)$ и паралелна је правој $l : x_1 = 1+2t,\ x_2 = 3-t,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1 + t,\ x_5 = -t,\ t \in \mathbb{R}$.

Решење: Збирка задатака из Аналитичке геометрије (О.Миленковић, М.Ђорић, 2002) - Афини простори димензије $n \geq 4$ - задатак 356. $\square$