РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ИЗ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ - септембар 2005.

Задатак 1 Нека је тачка P средиште тежишне дужи AA_1 троугла ABC. Ако је тачка Q пресек правих AC и BP, одредити односе $AQ : QC$ и $BP : PQ$.

Решење: Нека је $\overrightarrow{AQ} = \alpha\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{BQ}$. Како је $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BQ} = \alpha\overrightarrow{BC} + (1-\alpha)\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AC}$, из $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}$ (троугао APQ) добијамо $(\frac{1}{4} - \beta)\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{4} + \alpha\beta - \alpha)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Из линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ следи $\frac{1}{4} - \beta = 0, \frac{1}{4} + \alpha\beta - \alpha = 0$, одакле је $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{4}$, што значи да су тражени односи $AQ : QC = 1 : 2$ и $BP : PQ = 3 : 1$.

Задатак 2 Написати једначину криве другог реда која садржи тачку $A(1,1)$, ако су позната два пара конјугованих дијаметара: $2x - 3y = 0, x + 2y = 0$ и $x - y = 0, 3x - 5y = 0$.

Решење: Центар криве $C(0,0)$ налазимо у пресеку конјугованих дијаметара, те криву тражимо у облику: $a_{11}(x-0)^2 + 2a_{12}(x-0)(y-0) + a_{22}(y-0)^2 + a_{33} = 0$. Тачка $A(1,1)$ припада кривој, па је

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Користећи везу између коефицијената праваца $a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$ за сваки пар конјугованих дијаметара добијамо:

$$6a_{11} + a_{12} - 2a_{22} = 0, \tag{2}$$

$$5a_{11} + 8a_{12} + 3a_{22} = 0. \tag{3}$$

Решавањем система (1)–(3), уз $a_{11} = 1$, добијамо:

$$a_{12} = -\frac{28}{19},\ a_{22} = \frac{43}{19},\ a_{33} = -\frac{6}{19},$$

па је тражена крива $19x^2 - 28xy + 43y^2 - 6 = 0$.

Задатак 3 Одредити једначину конуса чија је директриса: $x^2 + y^2 + z^2 - x = 0, 4x = 3$, и чији се врх налази у координатном почетку.

Решење: Директриса конуса је круг $k : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}, 4x = 3$. Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка изводнице i конуса која садржи и тачку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in k$. Једначина изводнице је

$$i : \frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-0}{z_0-0} = t,\ t \in R,$$

одакле је

$$x_0 = \frac{x}{t},\ y_0 = \frac{y}{t},\ z_0 = \frac{z}{t}.$$

Пошто $M_0 \in i$, важи $x_0 = \frac{3}{4} = \frac{x}{t}$, па је $t = \frac{4x}{3}$. Даље, $M_0 \in k$, и уврштавајући $x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = \frac{3y}{4x}, z_0 = \frac{3z}{4x}$ у $(x_0 - \frac{1}{2})^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{1}{4}$ добијамо тражену једначину конуса: $3y^2 + 3z^2 = x^2$.

Задатак 4 Одредити формуле афине трансформације Еуклидског простора E^3 која представља композицију симетрије у односу на тачку $A(1,-1,0)$ и симетрије у односу на праву $p : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Решење: Нека је тачка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ симетрична тачки $M(x, y, z)$ у односу на $A(1, -1, 0)$. Тада је:

$$x_1 = 2 - x,\ \ y_1 = -2 - y,\ \ z_1 = -z. \tag{1}$$

Даље, нека је тачка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ симетрична тачки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у односу на праву p, а тачка $M'(x', y', z')$ средиште дужи M_1M_2. Како тачка M' припада p, њене параметарске координате су $M'(t, 2t-1, 3t+1),\ t \in R$ и важи $\overrightarrow{M'M} \perp \overrightarrow{u_p}(1, 2, 3)$. Из $\overrightarrow{M'M} \cdot \overrightarrow{u_p} = 0$ добијамо $t = \dfrac{1}{14}(x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 1)$, те је $M'(\dfrac{1}{14}(x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 1), \dfrac{1}{7}(x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 8), \dfrac{1}{14}(3x_1 + 6y_1 + 9z_1 + 11))$. Пошто је

$$x_2 = 2x' - x_1 = \frac{1}{7}(-6x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 1),$$

$$y_2 = 2y' - y_1 = \frac{1}{7}(2x_1 - 3y_1 + 6z_1 - 16),$$

$$z_2 = 2z' - z_1 = \frac{1}{7}(3x_1 + 6y_1 + 2z_1 + 11),$$

узевши у обзир (1) добијамо тражене формуле трансформације:

$$x_2 = \frac{1}{7}(6x - 2y - 3z - 17),$$

$$y_2 = \frac{1}{7}(-2x + 3y - 6z - 6),$$

$$z_2 = \frac{1}{7}(-3x - 6y - 23z + 5).$$