Аналитичка геометрија

-задаци по којима се држе вежбе-

1 Вектори у геометрији

1.1 (1) Доказати да се дијагонале четворугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

1.2 (3) Над страницама троугла ABC конструисани су паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Доказати да је $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

1.3 (5) На страницама AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 секу у једној тачки.

1.4 (7) У односу на тачку O дати су вектори положаја различитих тачака A и B. Изразити вектор положаја тачке C за коју је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.5 (8) Нека су A, B, O три неколинеарне тачке. Доказати да тачка C одређена са $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$.

1.6 (9) Нека су O, A, B, C четири некомпланарне тачке. Доказати да тачка D одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ припада равни троугла ABC ако и само ако је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

1.7 (13) У простору $\mathbb{E}^k$ дата је тачка O и систем од $n \geq 2$ тачака $A_1, \ldots, A_n$. Доказати да постоји тачно једна тачка $T \in \mathbb{E}^k$ таква да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$, као и да она не зависи од избора тачке O. (тежиште система тачака)

1.8 (14) Нека је T тежиште система од $n \geq 2$ тачака $A_1, \ldots, A_n$ у простору $\mathbb{E}^k$. Нека је T_j тежиште система тачака који настаје из датог система избацивањем тачке A_j. Доказати да се све дужи A_jT_j $(1 \leq j \leq n)$ секу у једној тачки, која те дужи дели у односу $1 : (n-1)$.

1.9 (15) Доказати да тетраедри $ABCD$ и $A'B'C'D'$ имају заједничко тежиште ако и само ако је $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{0}$.

1.10 (17) Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C', D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC.

1.11 (18) Ако је тачка F средиште странице BC паралелограма $ABCD$, а тачка E пресек дужи AF и BD, одредити односе у којима их она дели.

1.12 (19) Нека су тачке F и G, редом средишта страница BC и CD паралелограма $ABCD$. Ако је тачка E пресек дужи AF и BG, одредити односе у којима их она дели.

1.13 (27) Дат је троугао ABC и тачке D и E такве да је $4\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$ и $7\overrightarrow{BE} = 5\overrightarrow{EC}$. Ако је тачка F пресек дужи AE и CD, одредити односе у којима их она дели.

1.14 (21) Дат је троугао ABC и тачке M, N, P такве да је $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$. Доказати да се тежишта троуглова ABC и MNP поклапају ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma$.

1.15 (23) Дат је паралелопипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказати да је продор дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1.

1.16 (25) Нека симетрале углова код темена A, B и C троугла ABC секу наспрамне странице троугла редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Изразити векторе $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ у функцији од вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и дужина страница троугла, а затим доказати да се симетрале унутрашњих углова троугла секу у једној тачки. (центар уписаног круга)

1.17 (28) Нека је $ABCD$ паралелограм, а B_1 и D_1 редом тачке правих AB и AD. Ако је тачка C_1 пресек правих које садрже тачке B_1 и D_1 и паралелне су редом правама AD и AB, доказати да праве CC_1, BD_1 и DB_1 припадају једном прамену.

1.18 (34) На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L, такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL.

1.19 (36) Дат је троугао ABC и тачке $P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$. Доказати да су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. (Менелајева теорема)

1.20 (37) Дат је троугао ABC и тачке $P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$. Доказати да праве AP, BQ и CR припадају једном прамену ако и само ако је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. (Чевина теорема)

1.21 (44) Доказати да се висине троугла секу у једној тачки. (ортоцентар)

1.22 (45) Доказати да се симетрале страница троугла секу у једној тачки. (центар описаног круга)

1.23 (47) Доказати да у троуглу ABC важи $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (косинусна теорема)

1.24 (52) Доказати да је подножје висине из једног темена тетраедра ортоцентар наспрамне стране ако и само ако је тај тетраедар ортогоналан (наспрамне ивице су међусобно нормалне).

1.25 (56) Доказати да је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коме је дијагонала AC_1 нормална на раван A_1BD заправо коцка.

1.26 (58) За дате четири тачке $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ одредити тачку X такву да је збир $|\overrightarrow{XA}|^2 + |\overrightarrow{XB}|^2 + |\overrightarrow{XC}|^2 + |\overrightarrow{XD}|^2$ минималан.

1.27 (60) Ако је $OA'B'$ троугао добијен ротацијом око темена O за прав угао троугла OAB, доказати да је тежишна дуж из темена O троугла $OA'B$ нормална на праву AB'.

1.28 (61) Нека је $ABCD$ правоугаоник и $M \in \mathbb{E}^3$ произвољна тачка. Доказати да важи $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$, као и да је $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

1.29 (63) Наћи вектор $\overrightarrow{x}$ ако је $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = \alpha$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = \beta$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{c} = \gamma$, при чему су $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ некомпланарни вектори, а α, β и γ задати ненула скалари.

1.30 (64) Одредити вектор $\overrightarrow{x}$ ако важи $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} = \alpha$ и $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

1.31 (65) Решити једначину $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ по $\overrightarrow{x}$, ако су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ задати вектори.

1.32 (92) Ако су $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вектори положаја неколинеарних тачака A, B и C у односу на тачку O, доказати да је вектор $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times a$ нормалан на раван која садржи тачке A, B и C.

1.33 (94) Круг са центром у тачки S додирује праву OA у тачки A, као и праву OB. Одредити вектор $\overrightarrow{OS}$ у функцији од неколинеарних вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

1.34 (96) а) Нека су s_1, s_2 и s_3 дужине страница троугла, а $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ и $\overrightarrow{s_3}$ вектори чији су правци паралелни равни троугла и нормални на тим страницама, који су усмерени "изван троугла" и интензитета $\mid \overrightarrow{s_i} \mid = s_i$, $i = 1, 2, 3$. Доказати да је $\overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{s_2} + \overrightarrow{s_3} = \overrightarrow{0}$. б) Нека су s_1, s_2, s_3, s_4 површине страна тетраедра, а $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{s_3}, \overrightarrow{s_4}$ вектори нормални на те стране и орјентисани од центра тетраедра и интензитета $|\overrightarrow{s_i}| = s_i$. Доказати да је $\overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{s_2} + \overrightarrow{s_3} + \overrightarrow{s_4} = \overrightarrow{0}$.

1.35 (72) Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} \times \overrightarrow{CA}$ ако и само ако је P тежиште троугла ABC.

2 Координате вектора и тачака

2.1 (141) Дате су координате тачака $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$ у односу на афини координатни систем Oxy у равни. У односу на нови афини координатни систем $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6)$, $B(1,9)$, $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) неке тачке M у односу на систем Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у односу на нови афини координатни систем $O'x'y'$.

2.2 (143) Тежиште троугла OAB је тачка O'. У равни троугла изабрана су два афина координатна система: систем Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ и систем $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{O'B}$. Одредити координате средишта страница троугла OAB у односу на координатни систем $O'x'y'$.

2.3 (150) Дат је квадрат $ABCD$ чије се дијагонале секу у тачки E, а странице су дужине један. У његовој равни изабрана су два правоугла Декартова координатна система. Први систем Axy има почетак у тачки A, а координатни вектори су $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$, а други систем $Ex'y'$ има почетак у тачки E, а координатни вектори $\overrightarrow{i'}$ и $\overrightarrow{j'}$ су јединични вектори вектора $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{ED}$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у односу на систем Axy помоћу координата (x',y') исте тачке у односу на систем $Ex'y'$.

2.4 (159) Дат је тетраедар $OABC$. Афини координатни систем $Oxyz$ има почетак у темену O, а координатни вектори су $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$. Афини координатни систем $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{b'} = \overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB. Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у односу на координатни систем $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у односу на координатни систем $Ax'y'z'$ и одредити координате темена тетраедра у односу на систем $Ax'y'z'$.

2.5 (164) Дата су два Декартова координатна система $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ са заједничким почетком O. Координатни углови првог система су $\frac{\pi}{3}$, а други систем је правоугли. Осе Ox и Ox' се поклапају, оса Oy' лежи у равни Oxy и са осом Oy заклапа оштар угао, а позитивни смерови оса Oz и Oz' припадају истом полупростору одређеном са равни Oxy. Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у односу на координатни систем $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у односу на координатни систем $Ox'y'z'$.

3 Тачка, права и раван

3.1 Одредити углове које права $3x - 2y + 4 = 0$ заклапа са координатним осама.

3.2 Одредити једначину нормале праве $2x + 3y - 4 = 0$ која садржи пресек правих $x + y + 1 = 0$ и $x - y = 0$.

3.3 Дате су тачке $A(2,1)$ и $B(1,3)$. Одредити једначину снопа правих које садрже координатни почетак и пресецају дуж AB.

3.4 Одредити симетралу углова између правих $y = x - 2$ и $y = 3$.

3.5 Одредити једначину праве чији је коефицијент правца једнак -2 и која се налази на растојању 2 од координатног почетка.

3.6 (240) Одредити једначину нормале из тачке $A(2,3,-1)$ на раван $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.

3.7 (243) Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и нормална је на праву $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

3.8 (244) Одредити једначину равни која: 1) је паралелна равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$; 2) садржи z-осу и тачку $M(-3,1,2)$; 3) паралелна је x-оси и садржи тачке $A(4,0,-2)$ и $B(5,1,7)$.

3.9 (247) Одредити тачку која је симетрична тачки $P(3,-2,-4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију тачке P на раван α.

3.10 (249) Одредити тачку која је симетрична тачки $P(-1,-2,1)$ у односу на праву $l: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ као и пројекцију тачке P на праву l.

3.11 (255) Одредити једначину равни која садржи праву $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x - 4y + z + 5 = 0$.

3.12 (254) Одредити параметар λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

3.13 (256) Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2,-1,7)$ и сече праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

3.14 (257) Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

3.15 (259) Одредити раван α која са равни $x - 4y - 8z + 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: 1) $x + 5y + z = 0, x - z + 4 = 0$; 2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.

3.16 (262) Кроз тачку $T(-3,1,2)$ одредити праву l која је паралелна равни $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Одредити затим једначину праве која је симетрична правој l у односу на раван α.

4 Линије у равни

4.1 (173) Одредити цилиндарске координате тачке M, ако су њене правоугле Декартове координате $(1,2,-3)$.

4.2 (174) Одредити сферне координате тачке M, ако су њене правоугле Декартове координате $(0,1,-2)$.

4.3 (177) Нека је OA пречник круга полупречника a и права t тангента тог круга која садржи тачку A. Нека полуправа l са почетком у тачки O сече тангенту t у тачки C и круг у тачки B. Уколико је M тачка полуправе таква да је $OM = BC$ одредити једначину криве коју описује тачка M када полуправа l ротира око тачке O. (Диоклесова цисоида)

4.4 (181) Доказати да средишта паралелних тетива елипсе (хиперболе) припадају једној правој која садржи центар елипсе (хиперболе).

4.5 (182) Доказати да средишта паралелних тетива параболе припадају једној правој која је паралелна оси параболе.

4.6 (186) Доказати да је светлосни зрак који извире из жиже параболе и одбија се од параболе паралелан оси те параболе.

4.7 (187) У тачкама M_1 и M_2 елипсе повучене су тангнете које се секу у тачки P. Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2.

4.8 (190) Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.

4.9 (195) Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже секу под правим углом.

4.10 (197) Произвољна права l сече хиперболу у тачкама P и Q, а асимптоте хиперболе у тачкама M и N. Доказати да је $MP = NQ$.

4.11 (200) Доказати да је површина троугла чије су странице асимптоте хиперболе и тангента на хиперболу константна.

4.12 Доказати да површина паралелограма чије су странице конјуговани полудијаметри елипсе не зависи од избора полудијаметара.

4.13 (207) Нека је права p тангента хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у њеној произвољној тачки M. Ако је тачка P пол праве p у односу на параболу $y^2 = 2ax$, коју криву описује тачка P када тачка M описује дату хиперболу?

4.14 (204) Одредити геометријско место ортогоналних пројекција жиже параболе на њене нормале.

4.15 (210) Одредити оне међусобно конјуговане дијаметре криве другог реда $3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 22y + 30 = 0$ који се секу под углом $\frac{\pi}{4}$.

4.16 (212) Дата је крива $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$. Одредити дијаметар ове криве паралелан x-оси и њему конјугован дијаметар.

4.17 (214) Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(-2, -1)$ и $B(0, -2)$ и којој су праве $x + y + 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ осе симетрије.

4.18 (216) Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3, 4)$ и додирује криву $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

4.19 (219) Одредити једначину криве другог реда ако су позната два конјугована пречника $3x + 5y - 16 = 0$ и $3x - 5y + 4 = 0$ и директриса $x + y + 1 = 0$.

4.20 (223) Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2, 1)$ ако су дате њена директриса $x - 2y - 5 = 0$ и оса симетрије $2x + y - 1 = 0$.

4.21 (225б) Одредити једначину хиперболе ако су јој асимптоте $a_1 : 2x - y + 1 = 0$, $a_2 : x + 2y - 7 = 0$, а жижа $F(-2, 2)$.

4.22 (231) Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $l : x + y - 1 = 0$, а жиже су јој тачке $F_1(1, 1)$ и $F_2(-2, -2)$.

4.23 (235-6) Свести једначину криве на канонски облик изометријском трансформацијом, написати формуле трансформације и одредити основне елементе криве 1) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x + 3y - 7 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - xy - 3x - 1 = 0$; 3) $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0$

5 Површи и криве у простору

5.1 (281) Одредити једначину коноидне површи ако је њена оса $o : x = y = z$, директриса $d : x = 3, z = y^2 + 1$, а директорна раван $\alpha : z = 0$.

5.2 (281) Одредити једначину коноидне површи ако је њена оса $o : y = 0, z = -a$, директриса $d : x = 0, z = a$, а директорна раван $\alpha : x + y + z = 0$.

5.3 Одредити унију свих правих које су паралелне равни $\alpha : 2x + 3y - 5 = 0$ и секу праве $p : \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{2}$.

5.4 (282) Одредити једначину површи која представља унију правих које секу параболе $y^2 = 2x, z = 0$ и $z^2 = -2x, y = 0$ и паралелне су равни $y - z = 0$.

5.5 (285) Хипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ ротира око осе 1) Ox; 2) Oz. Одредити једначину добијене ротационе површи и испитати пресеке те површи са равнима паралелним координатним равнима.

5.6 Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1, 2, 3)$ око праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ написати као 1) Пресек равни и сфере којој центар припада равни; 2) пресек равни и цилиндра; 3) пресек две сфере полупречника 2.

5.7 (308) Дат је параболоид $\mathcal{S} : z + 2 = x^2 + y^2$ и раван $\pi_1 : y - z = 4$. 1) Одредити једначину равни π_2 која садржи тачку $M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ а ортогонална је на раван Oyz и раван π_1. 2) Пресечну криву L равни π_2 и површи $\mathcal{S}$ пројектовати редом на све три координатне равни, одредити једначине тих пројекција и прецизно утврдити које су криве те пројекције.

5.8 (275) Одредити једначине равни које садрже праву $\frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Одредити затим једначине симетралних равни диедара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.

5.9 (294) Дате су тачке $A(3, 5, -2)$, $B(5, -1, 0)$ и $C(-1, -5, 6)$. На правој AC налазе се центри сфера једнаких полупречника $R = \sqrt{11}$. Одредити једначине сфера ако оне додирују симетралну раван дужи AB.

5.10 (287) Одредити једначину сфере која додирује раван $\alpha : 2x + 2y + z - 7 = 0$ и садржи круг $k : x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + 2z - 5 = 0, x - 2y - 2z + 1 = 0$.

5.11 (293) Одредити једначину цилиндра описаног око сфере $px^2 + y^2 + z^2 = 1$, чије су генератрисе паралелне вектору $(1, 1, -2)$.

5.12 (291) Одредити једначину цилиндра чија је генератриса права паралелна правој $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$ а директриса парабола $x^2 = 2y, z = 0$.

5.13 (295) Одредити једначину кружног цилиндра ако су познате три његове изводнице: $l_1 : x = y = z$, $l_2 : x - 1 = y = z$, $l_3 : x = y - 1 = z$.

5.14 Одредити једначину конуса чије је врх тачка $V(0, 1, 1)$, а директриса елипса $x^2 + 3y^2 = 4, z = 0$.

5.15 (298) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1, 4, 5)$ и који додирује сферу $\sigma : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере σ на раван Oxz.

5.16 (303) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1, 1, 1)$ и који је описан око елипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

5.17 (307) Одредити једначину кружног конуса коме је права $o : x - y = 0, 4x - z = 0$ оса и коме је раван $\alpha : x + y + z = 0$ тангентна раван.

5.18 (311) Одредити геометријско место тачака једнако удаљених од праве $l : x - 2y + 10 = 0, x + z + 2 = 0$ и равни $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$. Одредити све ортонормиране репере у односу на које та површ има канонску једначину.

5.19 Изометријском трансформацијом свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом:
1) $x^2 - 3y^2 + 4zx - 2yz = 0$ (кружни конус)
2) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$ (елипсоид)
3) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4zy - 27 = 0$ (кружни цилиндар)

5.20 (314) Одредити основне елементе криве другог реда која је дата као пресек:
1) $\alpha : x + 2y + 2z - 18 = 0, \mathcal{S} : 12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0;$
2) $\alpha : 2x - 2y + z + 3 = 0, \mathcal{S} : 5x^2 + 4z^2 + 4xy - 12xz - 8yz + 12x - 24z + 12 = 0;$

5.21 (323б) Доказати да је свака тачка хиперболичког параболида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ пресек две праве које припадају том параболоиду.