Аналитичка геометрија

-задаци за практикум-

1 Вектори у геометрији

1. Нека је тачка P на страници AD, а тачка Q на дијагонали AC паралелограма $ABCD$, тако да је $\overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{QC} = 4\overrightarrow{AQ}$. Доказати да су тачке B, P и Q колинеарне.

2. Доказати да се дужи које спајају средишта наспрамних ивица произвољног тетраедра узајамно полове.

3. Нека је тачка E средиште странице AB произвољног четворугла $ABCD$ и нека за тачке F и G редом важи $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ако је тачка S средиште странице CD доказати да су тачке F, G и S колинеарне.

4. Нека су тачке M, N и P редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Нека је D тачка на страници BC, а тачке E и F редом средишта страница BD и CD. Праве AD и NP секу се у тачки Q. Доказати да је $EFNP$ паралелограм чије се дијагонале секу на дужи MQ.

5. Дат је троугао ABC и тачке X_n и Y_n тако да је $\overrightarrow{X_nB} = (n+1)\overrightarrow{AX_n}$ и $\overrightarrow{Y_nC} = n\overrightarrow{AY_n}$, за $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји тачка која припада свакој од правих X_nY_n $(n \in \mathbb{N})$.

6. Тачка P припада страници AB, а права p садржи тачку P и паралелна је тежишној дужи CC_1, произвољног троугла ABC. Ако је $p \cap BC = \{M\}$ и $p \cap AC = \{N\}$ изразити вектор $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

7. Доказати да се симетрале спољашњих углова код темена A и B и симетрала угла код темена C произвољног троугла ABC секу у једној тачки.

8. У простору су дати паралелограми $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Ако су тачке A, B, C и D средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 различите тачке, доказати да је онда и $ABCD$ паралелограм.

9. Нека је O заједнички почетак вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Наћи однос у коме треба да стоје параметри α и β тако да вектор $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ буде колинеаран са симетралом угла $\measuredangle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{-a})$

10. Користећи скаларни производ доказати да дужи које спајају средишта суседних страница квадрата образују квадрат.

11. У правоуглом троуглу ABC, са правим углом код темена C, конструисана је висина CD. Ако је M средиште дужи CD, а N средиште дужи BD, доказати да је $AM \perp CN$.

12. Дат је троугао ABC код кога су тежишне дужи из темена A и B међусобно нормалне. Одредити везу између дужина страница троугла.

13. Ако се у четвороуглу $ABCD$ дијагонале секу под правим углом, доказати да важи $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2$.

14. Извести формулу за рачунање површине троугла ABC: $2P = \frac{\sin B \sin C}{\sin A}|\overrightarrow{BC}|^2$.

15. Дат је произвољан троугао ABC површине P. Нека су тачке A_1, B_1 и C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

16. Израчунати површину троугла одређеног векторима $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ и $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, ако је $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ и $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 4$.

17. Доказати да за компланарне векторе $\overrightarrow{a_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$ важи $(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) \times (\overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{a_4}) = \overrightarrow{0}$.

18. Доказати идентитет $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \cdot \overrightarrow{b}$.

19. Дати систем вектора $\overrightarrow{a}(3, -4, 2)$, $\overrightarrow{b}(6, -8, 5)$ и $\overrightarrow{c}$ одређује паралелепипед чија је висина која одговара страни $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ једнака 2. Одредити целобројне координате вектора $\overrightarrow{c}$, ако је $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{14}$ и $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 5$.

20. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је ивица дужине 4. Нека су тачке M, N и P средишта страна $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1 тим редом. Одредити запремину тетраедра $AMNP$ и вектор висине тетраедра из темена A преко вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

2 Трансформације координата

1. Дат је правоугли Декартов координатни систем у равни Oxy. Нова оса Ox' заклапа са старом Ox угао $\dfrac{\pi}{12}$, а оса Oy' заклапа са осом Ox угао $\dfrac{\pi}{4}$. Изразити старе координате (x, y) неког вектора $\overrightarrow{a}$ преко његових нових координата (x', y').

2. Дата су два координатна система исте оријентације Oxy и $Ox'y'$. Први од њих је правоугли, а други косоугли са координатним углом $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Оса Ox' заклапа са осом Ox угао $\dfrac{\pi}{6}$. Почетак новог координатног система O' има координате $(1, -1)$ у старом. Наћи везу између старих и нових координата.

3. Дата је тачка $(1, -2)$ у односу на косоугли Декартов координатни систем чији је координатни угао $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Наћи координате дате тачке у односу на координатни систем чије су осе симетрале углова који граде осе датог система.

4. Дат је трапез $ABCD$ код којег је однос између паралелних страница $AB : DC = 3 : 1$. Наћи координате темена трапеза у односу на следећи координатни систем: почетак система је у тачки A, док су координатни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. (прелако?)

5. Дат је правоугли Декартов координатни систем. Наћи формуле трансформације ако се његов координатни почетак премести у тачку $O_1(2, 5)$, док се његове осе заротирају за $\dfrac{\pi}{4}$ у смеру казаљке на сату.

6. Дат је тетраедар $ABCD$. Координатни систем има почетак у темену A и координатне векторе $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$. Други координатни систем има почетак у тежишту T_1 стране BCD, а његови координатни вектори су: $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{T_1A}, \overrightarrow{b'} = \overrightarrow{T_1B}$ и $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{T_1D}$. Одредити координате темена C, тежишта тетраедра T и тежишта стране ACD у оба координатна система.

7. Дата су два правоугла координатна система $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Оса Ox' пролази кроз први октант и гради са осама Ox и Oy углове од $\dfrac{\pi}{3}$. Оса Oy' лежи у равни Oxy и гради са осом Oy оштар угао; оса Oz' је постављена тако да су оба система исте оријентације. Наћи везу између старих и нових координата.

8. *а)* Осе новог правоуглог координатног система $Ox'y'z'$одређене су у односу на стари правоугли координатни систем $Oxyz$ следећим Ојлеровим угловима $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \psi = \dfrac{\pi}{3}, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Одредити везу између старих и нових координата.

   б) Дате су везе између старог и новог координатног система:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{8}(-\sqrt{2}x' - 5\sqrt{2}y' + 2\sqrt{3}z') \\ y &= \frac{1}{8}(3\sqrt{6}x' - \sqrt{6}y' - 2z') \\ z &= \frac{1}{4}(\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + 2\sqrt{3}z'). \end{aligned}$$

   Одредити Ојлерове углове ове трансформације.

9. За јединичне координатне векторе првог координатног система узети су вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ који леже на ивицама тетраедра $OABC$, а за координатне векторе другог координатног система јединични вектори који леже на тежишним дужима OM_1, OM_2 и OM_3 страна BOC, COA и OAB, а усмерени су ка тачкама $M_i, i = 1, 2, 3$. Наћи везу између једног и другог координатног система као и координате темена тетраедра у односу на други систем.

10. Дата су два Декартова координатна система $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Први систем је правоугли, осе Oz и Oz' се поклапају, док су осе Ox' и Oy' бисектрисе углова $\measuredangle xOy$ и $\measuredangle zOy$. Наћи координате тачке M у односу на други координатни систем ако су јој координате у првом систему $(3, -1, 3)$.

3 Линије у равни

1. Наћи ГМТ у равни за које је однос растојања од тачке $O(0,0)$ и праве $x+y+1=0$ једнако $\sqrt{2}$. Која је то крива?
2. Дата је праве l и тачке $O \in l, A \notin l$. Одредити ГМТ C правоугаоника $ABCD$, ако тачка O припада страници CD, док се теме B креће по правој l.
3. Кроз координатни почетак су повучене тетиве на круг $x^2+y^2=2x$. Наћи ГМТ средина тих тетива.
4. Темена тетраедра су $M(x,y,z), (1,2,1), (0,0,1), (1,0,0)$. Шта је ГМТ M када је тетраедар увек исте запремине?
5. Одредити једначину параболе која пролази кроз тачке $(0, -\frac{3}{2})$ и $(0,-4)$ и има директрису $2x-y+1=0$.
6. Одредити једначину криве другог реда која садржи тачку $A(1,0)$ и ако је познат пар конјугованих дијаметара криве: $y=1$ и $y=x-1$ и њена тангента $x-y=0$.
7. За криву $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$ наћи пар конјугованих дијаметара од којих је један паралелан са правом $8x+10y+7=0$.
8. Наћи једначину конусног пресека који пролази кроз тачку $(1,1)$ и ако су му два пара конјугованих дијаметара $2x-3y=0, x+2y=0$ и $x-y=0, 3x-5y=0$.
9. Наћи једначину параболе која додирује x–осу у тачки $(4,0)$, а y–осу у $(0,3)$. (тежи!)
10. Написати једначину криве другог реда чије су осе симетрије праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ и која садржи тачке $(-2,-1)$ и $(0,-2)$.
11. Одредити ГМТ из коих се парабола $p: y^2=6x$ види под углом од $\frac{\pi}{4}$.
12. Одредити ГМТ из којих се елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ види под правим углом.
13. Доказати да ГМТ једнако удаљених од тачке $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и праве $x+y=0$ одређено једначином $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$. Ову једначину свести на канонски облик и написати формуле те трансформације.
14. Одредити једначину хиперболе чије су жиже $F_1(-11,-10)$и $F_2(13,14)$ и која садржи тачку $M(\sqrt{2}+1, 9\sqrt{2}+2)$. свести добијену једначину на канонски облик и написати формуле те трансформације.
15. Изометријском трансформацијом свести једначину криве $7x^2-8xy+y^2-26x+20y+28=0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације.
    (*а*) Одредити једначине асимптота криве у оба координатна система.
    (*б*) Одредити координате њених жижа у оба координатна система.
16. Шта представљају следеће једначине у поларним координатама:
    (*а*) $\rho=3$;
    (*б*) $\theta=\frac{\pi}{4}$;
    (*в*) $\rho\cos\theta=2$;

(г) $\rho \sin\theta = 3$;

(д) $\rho = 5\cos\theta$;

(ђ) $\sin\rho = \frac{1}{2}$.

Скицирати графике за сваку од њих.

17. Коју криву представља $\rho = 10\sin\theta$?

18. Написати једначину праве која је нормална на поларну осу и на њој одсеца одсечак дужине 5.

19. Дате су параметарске једначине кривих:

(а) $x = t^2 - 2t + 1$,
$y = t - 1$;

(б) $x = 2a\cot^2 t$,
$y = 2a\cot t$;

(в) $x = \cos^2 t$,
$y = \sin^2 t$;

(г) $x = \ln(\frac{t}{4} + 2)$,
$y = t^2$.

Које су то криве?

20. Трансформисати правоугли координатни систем тако да нове осе буду асимптоте криве $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 9x - 11y = 0$.

4 Површи и криве у простору

1. Одредити једначину равни која садржи тачке $A(1,-2,2)$ и $B(2,3,-1)$ и нормална је на раван $\alpha : 3x - 2y + z - 6 = 0$.

2. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(1,1,1)$ и и пресечну праву равни $\alpha : 2x - y + 2z - 1 = 0$ и $\beta : x + y - 3z + 2 = 0$.

3. Одредити вредност параметра λ за коју су равни $\lambda x + (1-\lambda^2)y + 4z + 7 = 0$ и $4x - 3\lambda y + 2\lambda^2 z - 5 = 0$ паралелне.

4. Одредити вредност параметра λ за коју су равни $6x + \lambda y - 4z = 0$ и $x + 2y + 2\lambda z - 3 = 0$ међусобно нормалне.

5. Наћи једначину равни која садржи x–осу и заклапа угао од $\frac{\pi}{6}$ са равни $2x - 3y + 4z - 1 = 0$.

6. Дате су равни $\alpha : x = 3 + u - v, y = 2 + 3u - v, z = 1 + u + v$ и $\beta : x = -1 + 2u + v, y = -3 - 5u + v, z = 4 + 7u + \lambda v, u, v \in \mathbb{R}$. Одредити λ тако да су оне међусобно нормалне.

7. Одредити једначину нормалне пројекције праве $p : -3x + 2y - z + 1 = 0, 2x - y + z + 5 = 0$ на раван $\alpha : -x + 3y - 4z + 3 = 0$.

8. Права b је дата као пресек равни $x - y + 3z - 2 = 0, 2x - 2y - 5z + 1 = 0$. Наћи једначине косе пројекције праве b на раван $x + y + z = 0$ ако се пројектовање врши паралелно вектору $7\overrightarrow{i} + 11\overrightarrow{j} + 13\overrightarrow{k}$. Одредити једначине ортогоналне пројекције праве b на исту раван.

9. Одредити заједничку нормалу правих $a : x - y + 2z - 1 = 0, 4x + 3y - z + 3 = 0$, $b : 3x + y - z + 2 = 0, 2x - 5y + 3z - 4 = 0$.

10. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(-2,3,1)$ и праву l, ако права l садржи тачку $P(0,2,1)$ и сече праву $p : 2x - y + 2z = 3, x + y + z = 0$ под правим углом. (септембар 2001)

11. Одредити једначину равни која је нормална на пресек равни $x + 2y = 3, -2x + z = 1$ и удаљена је од координатног почетка за $\sqrt{21}$.

12. Једно теме паралелепипеда је тачка $A(1,1,1)$, а три његове непаралелне стране припадају равнима $x + y + 2z - 1 = 0, 2x + y + 3z + 2 = 0, x - y - z + 3 = 0$. Одредити једначине равни којима припадају преостале три стране паралелепипеда.

13. Наћи једначину равни која полови углове између равни $5x - 5y - 2z - 3 = 0$ и $x + 7y - 2z + 1 = 0$.

14. Наћи центар и полупречник круга $k : (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25, 2x + 2y - z - 17 = 0$.

15. Написати једначине равни које додирују сферу $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 8 = 0$ и паралелне су равни $\alpha : x - y + 2z + 5 = 0$.

16. Наћи координате центра сфере која додирује равни $\alpha : z + 26 = 0$ и $\beta : x + 14 = 0$, садржи тачке $A(18, 0, -25)$ и $B(15, 1, 39)$ и ако се зна да су тражене координате цели бројеви. (јануар 2002)

17. Одредити једначину кружног цилиндра који садржи тачку $A(4, 2, 4)$ и чија је оса права $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{2}$.

18. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0, 5, 0)$ и који споља додирује сферу $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

19. По каквој кривој раван

    (*а*) $z = 3$

    (*б*) $y = 2$

    (*в*) $x = 2$

    сече конус $K : 3x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$?

20. Одредити једначину цилиндра P чија је изводница паралелна вектору $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ и чија је директриса крива $x = 1 + t, y = 2t, z = t^2 - t^3$.

21. Одредити углове које са координатним осам заклапа изводница цилиндарске површи $(2x - y + z)^2 - (x + 2y - z + 1)^2 - 1 = 0$.

22. Одредити једначину конусне површи чији је врх центар круга $k : (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36, 3x + y - z = 0$, а директриса ортогонална пројекција круга на раван Oxz. (октобар 2001)

23. Дат је кружни конус $K : 3x^2 - 4xy - 4xz - 8yz + 2x + 12y + 12z + 13 = 0$. Одредити осу тог конуса. Одредити једначине сфера полупречника $\sqrt{5}$ које су уписане у конус. (јун I 2002)

24. Једначина $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ представља кружни конус са врхом у координатном почетку чија се оса поклапа са z–осом. Пресећи тај конус са равни $z = \lambda(y + 1)$ и показати да ортогонална пројекција пресека на равна Oxy може бити елипса, хипербола, парабола или тачка у зависности од реалног параметра λ.

25. Наћи једначину конусне површи чији је врх $S(1, 1, 0)$ а директриса крива $x = t, y = t^2, z = e^t$.

26. Познато је да за различите вредности параметра λ једначина $\dfrac{x^2}{a^2 + \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 + \lambda} + \dfrac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0, a > b > c$ представља елипсоид, једнокрилни или двокрилни хиперболоид. У случају када та једначина представља елипсоиде показати да су њихови пресеци са равнима Oxy, Oxz и Oyz конфокалне елипсе. Показати да кроз сваку тачку $M(x, y, z)$ пролазе по један елипсоид, једнокрилни и двокрилни хиперболоид који задовољавају дату једначину.

27. Тетраедар је одређен координатним равнима и равни $x - 10y - 2z = 57$. Наћи центар и полупречник сфере уписане у тај тетраедар.

28. Око сфере $|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| = 3, \overrightarrow{r_0}(1, -2, -1)$ описан је цилиндар чије су генератрисе паралелне правој $x = 2t - 3, y = -t + 7, z = -2t + 5$. Одредити једначину тог цилиндра.

29. Одредити осу кружног конуса који је задат једначином $(mx + ny + pz)^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

30. Одредити једначину цилиндра који је описан око две сфере $|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}|=16, \overrightarrow{r_0}(1,0,2)$ и $|\overrightarrow{r}|=16$.

31. Наћи једначине правих које припадају хиперболичком параболоиду $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$ и које су паралелне равни $3x+2y-4z=0$. (јануар 2003)

32. Одредити једначину површи која је унија свих правих које секу праве $a: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}, b: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}, c: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{1}$. Која је то површ? (фебруар 2003)

33. Шта представљају једначине

   (*а*) $y^2+z^2-x^2-8x-2z-9=0$
   (*б*) $4x^2-9y^2-z^2+4x+12y-2z-16=0$
   (*в*) $9x^2+4y^2+36z^2-6x+4y-60z+21=0$
   (*г*) $4x^2+y^2-9z^2-12x+2y+12z+6=0$

34. Шта представљају једначине

   (*а*) $2x^2-y^2+z^2-4xy+2x+3=0$
   (*б*) $x^2-2y^2-xy+yz-xz+x-y=0$
   (*в*) $2z=xy$

5 Афине трансформације

1. У равни Oxy дате су праве $a: y=x$ и $b: y=1$ и тачке $A(3,1)$ и $B(-1,1)$. Одредити формуле афине трансформације која представља композицију хомотетије са центром у тачки A и ротације око тачке B и која слика праву a у праву b. (фебруар 2002)

2. У тродимензионом простору дате су праве $a: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ и $b: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$. Одредити једначину композиције транслације и ротације која пресликава праву a на праву b. (јануар 2001)

3. Дати су кругови $k_1: (x-6)^2+(y-6)^2+(z+1)^2=40, (x-3)^2+y^2+(z+7)^2=13$ и k_2 који припада равни $x+2y+2z+5=0$, има центар у тачки $C(-1,-1,-1)$ и полупречник 1. Одредити формуле хомотетије која пресликава k_1 на k_2. (јануар 2003)

4. Одредити афину трансформацију простора која представља композицију хомотетије са центром у тачки $A(1,0,2)$ и коефицијентом 2 и раванске рефлексије у односу на раван $\alpha: x+2y-z+3=0$. Одредити слику површи $x^2+y^2+2y+z^2-2z=-1$ при овој трансформацији. (септембар 2001)

5. Одредити формуле косе пројекције простора на раван $\alpha x+y-z=2$ у правцу вектора $\overrightarrow{u}(1,1,1)$. Одредити затим контуру слике сфере $S: (x-1)^2+(y+2)^2+(z+7)^2=4$ при овој пројекцији. (октобар 2002)

6 Афини простори димензије $n \geq 4$

1. У E^4 испитати узајамни положај дводимензионе равни $\alpha: x_1+x_2=3, x_2-x_3+x_4=1$ и праве $p: x_1=2t+1, x_2=-2t-1, x_3=-t, x_4=t$. Одредити и формуле афине трансформације којом се тачка $M(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E^4$ пресликава у њој симетричну тачку $M'(x_1',x_2',x_3',x_4')$ у односу на раван α. (2. колоквијум 2001)

2. У четвородимензионом еуклидском простору дата је дводимензиона раван α која садржи тачке $A(1,1,1,1), B(2,2,0,0), C(1,2,0,1)$ и права p одређена тачкама $D(1,1,1,2), E(1,1,2,1)$. Одредити узајамни положај праве p и равни и наћи дужину њихове заједничке нормале. (април 2001)

3. У четвородимензионом простору дате су хиперравни $\alpha : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9$ и $\beta : 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5$ и права $p : \dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2 - 2}{2} = \dfrac{x_3 - 3}{3} = \dfrac{x_4 - 5}{4}$. Одредити једначине хиперсфера које додирују равни α и β и чији центри припадају правој p. (октобар 2002)

4. У петодимензионом еуклидском простору дате су дводимензионе равни $\alpha : x_1 + x_3 - x_5 = 0, -2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, x_2 - x_3 - x_4 = 0$ и $\beta : x_1 = q, x_2 = 1, x_3 = 2p, x_4 = 0, x_5 = 0, p, q \in \mathbb{R}$. Одредити једначину сфере која додирује равни α и β и чији центар припада правој која сече обе равни и нормална је на сваку од њих. (октобар 2001)

5. У четвородимензионом еуклидском простору дата је дводимензиона раван α која садржи тачке $A(3,0,3,0), B(3,l,5,0), C(2,0,1,2)$ и сфера $S : (x_1-4)^2+(x_2-2)^2+(x_3+5)^2+(x_4-1)^2 = 1$. Одредити координате тачке на сфери S која је најближа равни α. (април 2002)

6. Одредити формуле афине трансформације четвородимензионог еуклидског простора која представља композицију симетрије у односу на дводимензиону раван $x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0$ и централне симетрије у односу на тачку $S(1,2,-1,0)$. (јануар 2002)

7. У четвородимензионом простору дата је права $p : \dfrac{x_1 - 3}{1} = \dfrac{x_2 - 4}{2} = \dfrac{x_3 + 5}{2} = \dfrac{x_4 - 2}{-1}$. Одредити формуле трансформације која је композиција рефлексије у односу на праву p и транслације за вектор $\overrightarrow{u}(1,2,2,-1)$. Одредити затим слику хиперсфере $S : (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3+1)^2 + (x_4+1)^2 = 1$ при овој трансформацији као и растојање сфере и њене слике. (фебруар 2003)

Додатак 1: ГМТ у равни

1. Дата је тачка $A(x_1, y_1)$ и круг $x^2+y^2 = 1$. Полара произвољне тачке M сече праву MA у тачки B. Коју криву описује тачка B ако се M креће по правој $mx + ny = p$? (За m, n и p се могу узети конкретни бројеви.)

2. Крајеви одсечка дужине $a+b$ се крећу по координатним осама правоуглог Декартовог система Oxy. Наћи геометријско место које описује тачка M која дати одсечак дели на делове дужина a и b.

3. Кроз тачку $(0, -a)$ постављен је сноп правих. На свакој од њих са обе стране њене пресечне тачке са x–осом постављен је одсечак дужине b. Наћи ГМТ крајева тих одсечака.

4. Дате су две тачке: M_1 на x–оси ($|OM_1| = a$) и M_2 на y–оси ($|OM_1| = a$). Наћи ГМТ M таквих да важи $|\overrightarrow{M_1M}|^2 + \alpha|\overrightarrow{M_2M}|^2 = \beta^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Продискутовати решења за разне вредности α и β.

5. У равни су дати конусни пресек $\mathcal{K}$, права l_1 и тачка O која не припада датој правој. Ако се права l окреће око тачке O она ће сећи конусни пресек $\mathcal{K}$ у тачкама M_1 и M_2, а праву l_1 у M_3.

   (*а*) Наћи ГМТ M таквих да су парови тачака M_1, M_2 и M, M_3 хармонијски конјуговани.

   (*б*) Наћи гранични положај ГМТ-а добијеног под *а)* када се права l_1 удаљује у бесконачност.

6. Права d окреће се равномерно (описује сноп) око центра круга $x^2 + y^2 = r$. Истовремено се и тачка P креће по кругу али у супротном смеру. Права AP сече праву d у тачки Q (A је фиксирана тачка на x–оси чија је апсциса a). Коју криву описује тачка Q ако су у почетном моменту права d и тачка P биле на x–оси? Продискутовати нађено ГМТ.

7. Дат је угао $\measuredangle AOB$ и тачка P унутар њега. Права l описује сноп са центром у P. У једном свом положају l сече краке угла у тачкама M_1 и M_2. Унутар угла, на l уочимо такву тачку M за коју је $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{M_2M}$. Показати да је ГМТ M хипербола када l описује сноп.

8. Дати паралелограм подељен је на четири једнака дела средњим линијама EF и GH које се секу у тачки O Тачка G лежи на страни CD, а F на BC. Дужи OG и GD подељене су на n једнаких делова, тако да на дужи OG имамо тачке $O, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = G$, а на дужи GD тачке $G, N_1, N_2, ..., N_{n-1}, N_n = D$. Показати да се праве EM_i и $FN_i, i = 1,2,...,n$ секу у тачкама које припадају елипси.

9. Дат је паралелограм $ABCD$ чије су странице AB и BC подељене су на n једнаких делова. Тако на страници AB имамо тачке $A, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$, а на BC тачке $B, N_1, N_2, ..., N_{n-1}, N_n = C$. Из тачке A повучене су праве $AN_i, i = 1, 2, ..., n$, а из тачака M_i праве l_i које су паралелне страници AD. Показати да се праве AN_i и l_i секу у тачкама које леже на параболи.

10. Наћи ГМТ центара хиперболе које пролазе кроз две фиксиране тачке и све имају једну заједничку асимптоту.

11. Нека је AB пречник круга поупречника r. Кроз тачку B повучена је тангента t на круг, а кроз тачку A права која сече круг у тачки C, а тангенту t у тачки D. Даље, кроз тачку C повучена је права c, паралелна са t, а кроз D права d паралелна са AB. Праве c и d секу се у тачки E. Одредити ГМТ E када права AC ротира око тачке A.

12. Дате су три праве l_1, l_2 и l_3 које пролазе кроз тачку O. Праве l_1 и l_2 су међусобно нормалне и пресечене су правом l_4 која не садржи O. Посматрана права l је стално паралелна са l_1 сече праве l_2, l_3 и l_4 редом у тачкама M_2, M_3 и M_4. Одредити ГМТ M под условом да су парови тачака M, M_4 и M_2, M_3 хармонијски конјуговани.

Додатак 2: Општи геометријски проблеми

1. У равни је дата затворена конвексна полигонална линија. Свакој страници полигона додељен је вектор нормалан на њу усмерен споља, чији је интензитет једнак дужини странице. Одредити суму тих вектора.

2. У простору $\mathbb{R}^3$ дат је полиедар. Свакој његовој страни додељен је вектор нормалан на њу, усмарен споља, чији је интензитет једнак површине стране. Одредити суму тих вектора.

3. Дата су сфере полупречника r. Свакој од њих додељен је вектор нормалан на њу и исте дужине. Наћи суму тих вектора.

4. Посматрамо пресек три права кружна цилиндра полупречника 1, чије су осе међусобно нормалне. Показати да се тај пресек може сместити у сферу полупречника $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

5. Ако је $[e]$ ортонормирана база, а A ортогонална матрица, да ли је и база $[e'] = A[e]$ такође ортонормирана?

6. Одредити $\min(a^2 + b^2)$ такав да полином $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ има бар једну реалну нулу.

7. У равни α су дате тачка F и права d и скуп тачака $\mathcal{K}$ такав да је $\dfrac{|KF|}{d(K, d)} = e > 0, \forall K \in \mathcal{K}$. Доказати да постоји конус $\mathcal{C}$ за који је $\mathcal{C} \cap \alpha = \mathcal{K}$. Да ли је тај конус јединствен?

8. Доказати да су директрисе и фокуси конусног пресека јединствено одређени.

9. Дат је билијарски сто облика елипсе. Посматрамо путању кугле одређену једним ударцем. Доказати да постоји елипса конфокална полазној коју тангирају све стране ове путање.

10. Свакој тачки у равни додељена је једна од три различите боје. Доказати да за произвољно $d > 0$ постоји дуж дужине d чије су крајње тачке обојене истом бојом.

11. Свакој тачки у равни додељен је по један реалан број тако да је центру *а)* описаног; *б)* уписаног круга произвољног троугла додељена аритметичка средина бројева који одговарају његовим теменима. Доказати да је то могуће ако и само ако је свакој тачки додељен исти број.

12. За унапред задат природан број n одредити конвексан полигон са n темена која имају целобројне координате такав да му је обим минималан.

13. За унапред задат природан број n одредити конвексан полиедар са n темена која имају целобројне координате такав да му је површина минимална.