May 9, 2019

Zadaci linearne algebre

- Rešavanje sistema linearnih jednačina $Ax = b$;
- Računanje determinanti matrica $\det(A)$;
- Nalaženje inverznih matrica A^{-1};
- Određivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora matrica $Ax = \lambda x$;

Numeričke metode:

- direktne
- iterativne

Osobine matrice

- A je regularna ako je $\det(A) \neq 0$
- A je singularna ako je $\det(A) = 0$
- A je Hermiteova ako je $A^* = A$
- A je simetrična ako je $A^T = A$
- A je unitarna ako je $A^* = A^{-1}$
- A je ortogonalna ako je $A^T = A^{-1}$
- A je normalna ako je $A^*A = AA^*$
- A je pozitivno definitna ako je Hermiteova i $x^*Ax > 0, \forall x \neq 0$

- Matrice A i B su slične $A \sim B$ ako postoji regularna matrica T takva da je $B = T^{-1}AT$.
- Sopstvene vrednosti matrice A su oni skalari λ za koje jednačina $Ax = \lambda x$ ima netrivijalna rešenja. Ta netrivijalna rešenja su sopstveni vektori.
- $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je karakteristični polinom matrice A. Nule karakterističnog polinoma su sopstvene vrednosti.

Norme vektora

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- $p = 1$: Apsolutna norma vektora $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $p = 2$: Euklidska norma vektora $||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
- $p \to \infty$ Uniformna norma vektora $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

U svakom konačno-dimenzionom prostoru sve norme su međusobno ekvivalentne tj. postoje konstante $c_1, c_2 > 0$ takve da

$$c_1 ||x||' \leq ||x||'' \leq c_2 ||x||'$$

Norme matrica

Norma matrice A je indukovana normom vektora

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

- $p = 1$: $||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $p = 2$: $||A||_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^* A)}$
- $p \to \infty$: $||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Norme $||A||$ i $||x||$ su saglasne ako je $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

Uslovljenost

Uslovljenost regularne matrice je skalar $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$.
Uslovljenost singularne matrice je $cond(A) = \infty$.

- $cond(\alpha A) = cond(A),\ \alpha = const$
- $cond(I) = ||I|| \cdot ||I|| = 1$
- $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||\ \geq ||A \cdot A^{-1}|| = cond(I) = 1 \Rightarrow$
  $1 \leq cond(A) \leq \infty$.