

# UNM zadaci za praktikum

## INTERPOLACIJA I DIFERENCIRANJE

### 1.

Neka je funkcija  $f$  zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $F = [f_1, \dots, f_n]$  (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *novatablica.m* u kom se prethodna tablica proširuje do nove dodavanjem čvorova  $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, i = 1, \dots, n-1$ , i računanjem vrednosti funkcije  $f$  u njima korišćenjem formule:  $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) = \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}, i = 1, \dots, n-1$ .
- Napisati M-fajl *Lagr1.m* sa funkcijom  $L = \text{Lagr1}(x)$  koja za uneti argument  $x$  vraća približnu vrednost funkcije  $f$  u toj tački izračunatu pomoću Lagranžovog interpolacionog polinoma  $L$ , korišćenjem svih vrednosti iz nove tablice.

### 2.

Neka je funkcija  $f$  zadata eksplicitno komandnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom  $[X, Y] = \text{tablica}(a, b, n)$  koja tabelira zadatu funkciju  $f$  na intervalu  $[a, b]$  sa  $n$  čvorova.
- Napisati M-fajl *Lagr1b.m* sa funkcijom  $[L, y] = \text{Lagr1b}(x, a, b, n)$  koji formira i vraća koeficijente Lagranžovog interpolacionog polinoma  $L$  formiranog koristeći sve vrednosti iz tablice, kao i vrednost formiranog polinoma u tački  $x$ .
- Uporediti grafike funkcije  $f$  i formiranog interpolacionog polinoma.

### 3.

Neka je funkcija  $f$  zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $F = [f_1, \dots, f_n]$  za tu tablično zadatu funkciju.

- Napisati M-fajl *tablicaCheck.m* sa funkcijom  $t = \text{tablicaCheck}()$  koja vrši proveru da li je tablica u komandnom fajlu *tablica.m* ekvidistantna i da li je niz  $X$  zadat u strogo rastućem poretku. Ukoliko su oba uslova ispunjena funkcija vraća vrednost 1, u suprotnom vraća vrednost 0 i u oba slučaja ispisuje odgovarajuću poruku.
- Napisati M-fajl *polozaj.m* sa funkcijom  $\text{polozaj}(x)$  koja za uneti argument  $x$  vraća vrednost 1 ukoliko je  $x < x_2$ , 2 ukoliko je  $x > x_{n-1}$  i 0 inace.
- Napisati M-fajl *Njutn.m* sa funkcijom  $\text{Njutn}(x)$  koja ukoliko su svi uslovi ispunjeni, vraća približnu vrednost funkcije  $f$  u tački  $x$  izračunatu korišćenjem I (II) Njutnovog interpolacionog polinoma, ako je vrednost funkcije  $\text{polozaj}$  u tački  $x$  jednaka 1 (2), odnosno izdaje odgovarajuću poruku ukoliko je  $\text{polozaj}(x) = 0$ .

## 4.

Neka je funkcija  $f$  zadana tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *tablicaCheck.m* sa funkcijom  $t = \text{tablicaCheck}()$  koja vrši proveru da li je niz  $X$  zadat u strogo rastućem poretku i da li je niz  $Y$  monoton. Ukoliko su oba uslova ispunjena funkcija vraća vrednost 1, u suprotnom vraća vrednost 0. Ukoliko neki od uslova nije ispunjen, funkcija ispisuje odgovarajuću poruku.
- Napisati M-fajl *vredfunk.m* sa funkcijom  $y = \text{vredfunk}(x)$  koja za uneti argument  $x$  vraća približnu vrednost funkcije  $f$  u toj tački izračunatu pomoću Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama konstruisanog korišćenjem svih vrednosti iz tablice.

## 5.

Neka su u komandnom fajlu *podaci.m* dati funkcija  $f$  i vektor  $X$  koji sadrži samo celobrojne vrednosti.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom  $[X1, Y1] = \text{tablica}()$  koja formira tablicu gde se vektor  $X1$  sastoji samo od parnih vrednosti vektora  $X$ , a vektor  $Y1$  su vrednosti eksplicitno zadate funkcije  $f$  u čvorovima vektora  $X1$  zaokruženi na 3 decimale.
- Napisati M-fajl *inverz.m* sa funkcijom  $\text{inverz}(y)$  koja za zadatu vrednost  $y$  inverznom interpolacijom približno određuje  $x$  za koje je  $f(x) = y$ .  
(\*Tablica neće biti ekvidistantna, pa koristimo Lagranzov interpolacioni polinom)

## 6.

Neka je funkcija  $f$  zadana eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom  $[X, Y] = \text{tablica}(a, b, n)$  koja formira ekvidistantnu tabelu funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$  sa  $n$  čvorova.
- Napisati M-fajl *promenaZnaka.m* sa funkcijom  $[c, d] = \text{promenaZnaka}(a, b, n)$  koja na osnovu nizova  $X$  i  $Y$  dobijenih pozivanjem funkcije  $\text{tablica}(a, b, n)$  pronalazi i kao rezultat vraća prvi interval  $[x_i, x_{i+1}]$  u kome funkcija menja znak ( $c = x_i, d = x_{i+1}$ ). Pretpostavlja se da takav interval postoji.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom  $\text{nula}(a, b, n)$  koja metodom inverzne interpolacije približno određuje nulu funkcije  $f$  na intervalu  $[c, d]$ , koristeći II Njutnov interpolacioni polinom zaključno sa konačnim razlikama reda 3. Kriterijum zaustavljanja iterativnog niza:  $|q_i - q_{i-1}| \leq 10^{-4}, i = 2, \dots$

## 7.

Neka je funkcija  $f$  zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *izvod.m* sa funkcijom  $[X, Y, Yi] = izvod()$  u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica prvog izvoda funkcije  $f$  u tačkama  $x_2, \dots, x_{n-1}$  korišćenjem sledeće formule:  $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ , gde je  $Yi = [f'(x_2), \dots, f'(x_{n-1})]$ .
- Napisati M-fajl *vredizvod.m* sa funkcijom *vredizvod(x)* koja za uneti argument  $x$  vraća približnu vrednost prvog izvoda funkcije  $f$  izračunatu korišćenjem Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama konstrusanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *izvod.m*.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje i vraća jednu nulu prvog izvoda funkcije  $f$  korišćenjem Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama (pretpostavka je da je prvi izvod monotona funkcija).

## 8.

Neka je funkcija  $f$  zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna (sa korakom  $h$ ).

- Napisati M-fajl *drugiizvod.m* sa funkcijom  $[X, Y, Y2i] = drugiizvod()$  u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica drugog izvoda funkcije  $f$  u tačkama  $x_2, \dots, x_{n-1}$  korišćenjem sledeće formule:  $f''(x) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$ , gde je  $Y2i = [f''(x_2), \dots, f''(x_{n-1})]$ .
- Napisati M-fajl *vred2izvod.m* sa funkcijom *vred2izvod(x)* koja za uneti argument  $x$  vraća približnu vrednost drugog izvoda funkcije  $f$  izračunatu korišćenjem I Njutnovog interpolacionog polinoma konstrusanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *drugiizvod.m*.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje nulu drugog izvoda funkcije  $f$  (pretpostavka je da je drugi izvod monotona funkcija) koristeći I Njutnov interpolacioni polinom zaključno sa konačnim razlikama reda 3. Kriterijum zaustavljanja iterativnog niza:  $|q_i - q_{i-1}| \leq 10^{-4}, i = 2, \dots$

## 9.

Neka je funkcija  $f$  zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza  $X = [x_1, \dots, x_n]$  i  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna (sa korakom  $h$ ).

- Napisati M-fajl *izvod1.m* sa funkcijom *izvod1(x)* koja računa vrednost prvog izvoda tabelirane funkcije u tački  $x$  koristeći diferenciranje I Njutnovog interpolacionog polinoma zaključno sa konačnim razlikama reda 4.
- Napisati M-fajl *izvod2.m* sa funkcijom *izvod2(x)* koja računa vrednost drugog izvoda tabelirane funkcije u tački  $x$  koristeći diferenciranje I Njutnovog interpolacionog polinoma zaključno sa konačnim razlikama reda 4.

# INTEGRACIJA

## 10.

Neka je funkcija  $f$  zadata eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *trapez.m* sa funkcijom  $I = \text{trapez}(a, b)$  koja približno računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije  $f$  (granice integracije su  $a$  i  $b$ ) korišćenjem uopštene Trapezne kvadraturene formule sa  $n = 9$  čvorova.
- Napisati M-fajl *simps.m* sa funkcijom  $I = \text{simps}(a, b)$  koja približno računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije  $f$  (granice integracije su  $a$  i  $b$ ) korišćenjem uopštene Simpsonove kvadraturene formule sa  $n = 9$  čvorova.
- Napisati M-fajl *vredfunk.m* sa funkcijom  $[X, Y] = \text{vredfunk}(k, p)$  koja približno izračunava vrednost funkcije  $I(x) = \int_1^x f(t)dt$ , kada se  $x$  kreće od 2 do  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  sa korakom 1. Ukoliko je  $p = 1$  integrale računati koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturnu formulu (sa  $n = 9$  čvorova), a u slučaju kada je  $p = 2$  uopštenu Trapeznu kvadraturnu formulu (sa  $n = 9$  čvorova). Funkcija vraća dva niza:  $X$  sa vrednostima  $x_i$  i  $Y$  sa izračunatim vrednostima funkcije  $I(x)$  u tačkama  $x_i$ .

## 11.

Neka je funkcija  $f$  zadata eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *integralt.m* sa funkcijom  $[I, \text{briter}] = \text{integralt}(a, b, \text{tol})$  koja sa tačnošću  $\text{tol}$  računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije  $f$  (granice integracije su  $a$  i  $b$ ) korišćenjem uopštene Trapezne kvadraturene formule. Funkcija vraća vrednost integrala i broj iteracija.
- Napisati M-fajl *integrals.m* sa funkcijom  $[I, \text{briter}] = \text{integrals}(a, b, \text{tol})$  koja sa tačnošću  $\text{tol}$  računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije  $f$  (granice integracije su  $a$  i  $b$ ) korišćenjem uopštene Simpsonove kvadraturene formule. Funkcija vraća vrednost integrala i broj iteracija.
- Napisati M-fajl *grafik.m* sa funkcijom  $\text{grafik}(a, b)$  koja prikazuje grafik zavisnosti brzine konvergencije Simpsonove kvadraturene formule (plavo) i Trapezne kvadraturene formule (crveno), za različite tolerancije ( $\text{tol} = 10^{-1}, \dots, 10^{-6}$ ).

## 12.

Neka je funkcija  $f$  (koja ne mora biti (samo) pozitivna) zadata eksplicitno funkcijskim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *Runge.m* sa funkcijom  $\text{Runge}(S1, S2)$  koja vraća vrednost Rungeove ocene greške uopštene Simpsonove kvadraturene formule, ako su  $S1$  i  $S2$  njene vrednosti od kojih je jedna izračunata sa dvostruko manjim korakom u odnosu na drugu.
- Napisati M-fajl *zapremina.m* sa funkcijom  $\text{zapremina}(a, b, \text{tol})$  koja koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturnu formulu vraća zapreminu tela nastalog obrtanjem figure ograničene pravama  $y = 0, x = a, x = b$  i funkcijom  $f$  oko ose  $Ox$  izračunatu sa tačnošću  $\text{tol}$ . (Za ocenu tačnosti koristiti funkciju Runge.)

## 13.

(kolokvijum 2011.)

- Formirati M-fajl *integral.m* sa funkcijom  $integral(f, a, b)$  koja računa i vraća vrednost  $\int_a^b f(x)dx$ . Dozvoljeno je korišćenje ugrađene MATLAB funkcije za izračunavanje integrala.
- Formirati M-fajl *sistem.m* sa funkcijom  $sistem(d, t, n)$  koja formira sistem linearnih jednačina koji se dobija prilikom nalaženja koeficijenata kvadraturene formule oblika

$$\int_0^d t(x)f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f\left(\frac{i * d}{n}\right)$$

koja treba da je tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Funkcija treba da vraća matricu sistema i vektor desne strane.

- Formirati M-fajl *koeficijenti.m* sa funkcijom  $koeficijenti(d, t, n)$  koja određuje koeficijente  $A_i$  gore napisane kvadraturene formule. Dozvoljeno je korišćenje operatora \ za rešavanje sistema. (\* Nakon sistema linearnih jednačina, zadatak se može rešavati i nekom od metoda za sisteme linearnih jednačina: LU, iterativna,...).

## 14.

- Napisati M-fajl *legendre\_poly.m* sa funkcijom  $L = legendre\_poly(n, a, b)$  koja formira i vraća niz SVIH Ležandrovih polinoma do stepena  $n$  na intervalu  $[a, b]$ . Nacrtati grafik svih formiranih Ležandrovih polinoma.
- Napisati M-fajl *Cebisev\_poly.m* sa funkcijom  $C = Cebisev\_poly(n, a, b)$  koja formira i vraća niz SVIH Čebiševljevih polinoma do stepena  $n$  na intervalu  $[a, b]$ . Nacrtati grafik svih formiranih Čebiševljevih polinoma.
- Napisati M-fajl *integrali.m* sa funkcijom  $integrali(f, a, b)$  koja korišćenjem ugrađene MATLAB funkcije *quad()* računa i štampa vrednosti sledećih integrala:

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(x) \cdot \sin(x)dx, \quad \int_a^b f(x) \cdot L_5(x)dx, \quad \int_a^b L_5(x) \cdot L_3(x)dx,$$

gde je  $L_i(x)$  Ležandrov polinom stepena  $i$ . Prosleđena funkcija  $f$  može biti složena funkcija.

## 15.

(kolokvijum 2012.)

- Napisati M-fajl *legendre.m* sa funkcijom  $L = legendre(n)$  koja kao rezultat vraća Ležandrov polinom  $L$  stepena  $n$  na intervalu  $[1, 1]$ .
- Napisati M-fajl *polinom.m* sa funkcijom  $P = polinom(n, m)$  koja kao rezultat vraća polinom  $P$  dobijen preko formule:

$$P(x) = (1 - x^2) \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

gde je  $L_n(x)$  Ležandrov polinom stepena  $n$  za  $-1 \leq x \leq 1$ .

- Napisati M-fajl *integral.m* sa funkcijom  $I = integral(n, m, tol)$  koja sa tačnošću  $tol$  približno određuje i kao rezultat vraća vrednost integrala  $\int_{-1}^1 P(x)e^x dx$ . Integral računati korišćenjem uopštene Simpsonove formule. Polinom  $P(x)$  je polinom dobijen pod (2).

## SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

### 16.

- Napisati M-fajl `sistem.m` sa funkcijom  $x = sistem(A, B)$  koja metodom proste iteracije rešava sistem jednačina  $Ax = B$ . Broj iteracija fiksirati na 50.

- Napisati M-fajl `matrica.m` sa funkcijom  $[A \ B \ x] = matrica(broj, d)$  koja vraća kolonu  $B$  duzine  $d$  čiji su svi elementi jedinice, kvadratnu matricu  $A_{d \times d}$  koja iznad dijagonale ima jedinice, po dijagonali ima  $10 \cdot broj$ , dok na prvoj poddijagonali ima  $broj - 1$ , na drugoj poddijagonali ima  $broj - 2$ , itd., kao i vektor  $x$  koji je rešenje sistema  $Ax = B$  (koristiti fajl `sistem.m` za nalaženje vektora  $x$ ).

### 17.

- Formirati M-fajl `dominantna.m` sa funkcijom  $d = dominantna(A)$  koja proverava da li je zadata matrica  $A$  dijagonalno dominantna. Funkcija vraća vrednost 1 ako je matrica dijagonalno dominantna, inače vraća 0.

- Formirati M-fajl `sistem.m` sa funkcijom  $[iter \ x] = sistem(A, B, tol)$  koja nalazi rešenje sistema  $Ax = B$  Gaus-Zajdelovom metodom pod uslovom da je matrica  $A$  dijagonalno dominantna. Inače ispisati poruku "Matrica nije dijagonalno dominantna". Iterativni postupak se prekida kada za dve uzastopne iteracije važi  $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$ . Program vraća rešenje  $x$  i broj iteracija  $iter$ .

### 18.

- Formirati M-fajl `LUdekompozicija.m` sa funkcijom  $x = LUdekompozicija(A, B)$  koja metodom LU dekompozicije vraća rešenje sistema  $Ax = B$ . Koristiti ugrađenu matlab funkciju `lu`.

- Formirati M-fajl `inverzna.m` sa funkcijom  $inverzna = inverz(A)$  koja nalazi matricu  $A^{-1}$  korišćenjem funkcije iz fajla `LUdekompozicija.m`.