# Vulkan

Seminarski rad u okviru kursa
Osnove matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Miloš Đurić
mi18191@alas.matf.bg.ac.rs

14. maj 2023.

**Sažetak**

Vulkan na visini $H$ u odnosu na okolinu izbacuje užareno kamenje brzinom od maksimalno $v_0$. Odrediti zonu oko vulkana gde nije bezbedno leteti, kao i nebezbednu zonu u podnožju.

Svi karakteri i događaji koji se opisuju u radu su izmišljeni. Svaka sličnost sa stvarnim ličnostima i događajima je slučajna.

## Sadržaj

# 1 Zona zabrane letova

Nedavno, naš drug Perica je postao pilot. Da bi impresionirao Jovicu i društvo, Perica je rešio da leti iznad aktivnog vulkana i napravi nekoliko fotografija. Perica, međutim, ne ume da odredi koliko sme da se približi vulkanu na određenoj nadmorskoj visini i koje je bezbedno rastojanje od vulkana za prinudno sletanje u slučaju havarije, pa nas je zamolio da napravimo matematički model na osnovu koga će moći to da izračuna.

Sa svojim instrumentima, Perica može da odredi nadmorsku visinu vulkana i najveću početnu brzinu kojom vulkan ispaljuje užareno kamenje. Na osnovu tih podataka ne možemo da odredimo koliko bi bliski susret sa užarenim kamenjem na zadatoj visini bio opasan. Stoga, najbezbednija pretpostavka je da užareno kamenje posmatramo kao materijalne tačke koje ubijaju pri prvom kontaktu. Kao duhovi u igri *Pac-Man*.

## 1.1 Specifičnosti i uopštenja

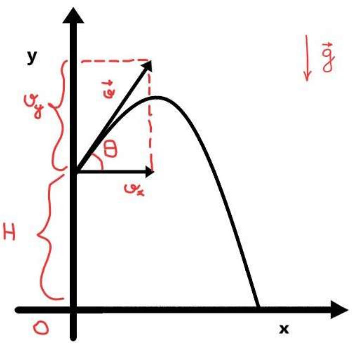
Problem određivanja minimalnih rastojanja od vulkana na kom se letilica može bezbedno nalaziti u zavisnosti od visine je ekvivalentnan problemu određivanja rastojanja do kojih vulkan može da dobaci na datoj visini. Dalje, problem određivanja maksimalnog rastojanja na koje vulkan može da izbaci užareno kamenje se može svesti na problem dvodimenzionog kosog hitca iz proizvoljne tačke na $y$ osi, pošto je visina vulkana poznata vrednost. Naime, pored toga što vulkan ispaljuje užareno kamenje u visinu i u daljinu, vulkan u najopštijem slučaju može da izbacuje užareno kamenje na sve četiri strane sveta. Kako ne možemo da pretpostavimo da vulkan više voli da gađa jednu stranu sveta užarenim kamenjem u odnosu na druge, pretpostavićemo da vulkan sa uniformnom raspodelom može da ispali kamen na bilo koju stranu. Tada, trajektorija po $x$ i $y$ koordinatama, za istu početnu brzinu i isti ugao pod kojim vulkan izbacuje užareni kamen, će uvek biti ista za sve strane sveta. Stoga, dovoljno je da odredimo granicu do koje vulkan može da izbaci kamen po $x$ i $y$ koordinatama. Nakon toga, dobijeno rešenje se jednostavno može uopštiti rotacijom oko $y$ ose za ceo krug, kako bi se dobila 3d slika nebezbedne zone leta.

# 2 Model

Počećemo od najjednostavnijeg modela. Kako ne želimo da Perica dobije pogrešne ideje zbog pretpostavke da je Zemlja ravna ploča, počećemo od pretpostavke da je Zemlja sfera beskonačnog radijusa sa konstantnom gravitacijom. Zanemarićemo sile kao što su centrifugalna sila koja nastaje zbog rotacije Zemlje i Koriolisova sila koja nastaje zbog toga što se užareno kamenje kreće u sistemu koji rotira. Zapravo, zanemarićemo da Zemlja rotira. Pretpostavićemo da atmosfera ne postoji i da je teritorija oko vulkana ravna, odnosno da ne postoji nikakvo brdo iza koga bi Periaca mogao da se sakrije od užarenog kamenja. Konačno, pretpostavićemo da vulkan izbacuje kamenje brzinama manjim od relativističkih, tako da će i protok vremena biti konstantan.

Dakle, poznata nam je maksimalna početna brzina užarenog kamenja $v_0$ i početna tačka $(0, H)$ iz koje vulkan izbacuje kamenje. Užareno kamenje se kreće u homogenom i izotropnom gravitacionom polju sa konstantnim gravitacionim ubrzanjem $g$ i konstantnim protokom vremena.

## 2.1 Put užarenog kamenja




Kosi hitac sa visine $H$ početnom brzinom $v_0$

Za početak, trebalo bi da odredimo trajektoriju užarenog kamenja. Vektor brzine $\vec{v}$ možemo rastaviti na komponente visine i dužine koje odgovaraju osama $x$ i $y$ u Dekartovim koordinatama.

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta$$

Kinetička energija $T$ je proporcionalna kvadratu brzine $v$ i možemo je zapisati

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

odnosno u Dekartovim koordinatama

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x^2} + \dot{y^2}),$$

dok je potencijalna energija $U$ u gravitacionom polju jednaka je proizvodu njegove težine i visine na kojoj se nalazi

$$U = mgy,$$

gde je $m$ masa materijalne tačke.

Primećujemo da kinetička energija zavisi od brzine kojom se materijalna tačka kreće, a potencijalna energija zavisi od njene pozicije.

Sada, kada nam je poznata funkcija Lagranža,

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x^2} + \dot{y^2}) - mgy, \end{aligned}$$

jednačine Lagranža [6] će nam dati vezu između ubrzanja, brzine i pozicije,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

gde je $q$ generalisana koordinata.

Obzirom da naš sistem ima dva stepena slobode, imaćemo dve ovakve diferencijalne jednačine za koordinate $x$ i $y$. Prvo ćemo rešiti diferencijalnu jednačinu za koordinatu $x$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Nalazimo parcijalne izvode od $L$ po $x$ i $\dot{x}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

i onda naša diferencijalna jednačina postaje

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = 0,$$

odnosno

$$m\ddot{x} = 0.$$

Pošto je skalar, možemo obe strane da podelimo sa $m$ tako da nam ostane diferencijalna jednačina

$$\ddot{x} = 0.$$

Nakon integracije $\int \ddot{x}dt = \int 0dt$, dobijamo

$$\dot{x} = C_1,$$

gde je $C_1$ neka konstanta koja ne utiče na ubrzanje. No kako znamo da je $v_x = v_0 \cos\theta$ onda mora biti $C_1 = v_0 \cos\theta$, pa imamo diferencijalnu jednačinu $\dot{x} = v_0 \cos\theta$, odnosno

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta.$$

Kada to rešimo, dobijamo opšte rešenje

$$\begin{aligned} x &= \int v_0 \cos\theta dt \\ &= tv_0 \cos\theta + C_2, \end{aligned}$$

gde je $C_2$ neka konstanta bez uticaja na brzinu. Za $t = 0$ u našem sistemu znamo da je $x = 0$, pa onda mora biti $C_2 = 0$, te dobijamo jednačinu za koordinatu $x$ kao funkciju od vremena $t$

$$x = v_0 t \cos\theta.$$

Sada možemo da pređemo na jednačinu Lagranža za $y$ koordinatu.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Parcijalni izvodi od $L$ po $y$ i $\dot{y}$ su

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg.$$

Kada to vratimo u diferencijalnu jednačinu, dobijamo

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0,$$

odnosno

$$m\ddot{y} + mg = 0.$$

Opet, kako je $m$ skalar, možemo sa $m$ da podelimo levu i desnu stranu i da nam ostane

$$\ddot{y} + g = 0,$$

a to je zapravo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

i kada to integralimo dobijamo opšte rešenje

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3,$$

gde je $C_3$ konstantan deo brzine našeg užarenog kamena po $y$ osi, odnosno deo koji ne utiče na ubrzanje. To je opet upravo onaj deo koji se odnosi na početnu brzinu $v_y = v_0 \sin\theta$, pa imamo

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta.$$

Sada kada rešimo ovu diferencijalnu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} y &= \int (-gt + v_0 \sin\theta) dt \\ &= -g\frac{t^2}{2} + tv_0 \sin\theta + C_4, \end{aligned}$$

gde je $C_4$ neka konstantna vrednost koja ne utiče na brzinu. To je zapravo deo početnog položaja koji odgovara $y$ komponenti. U našem slučaju to je visina vulkana $H$ koja se zadaje unapred. Stoga jednačina kretanja po koordinati $y$ kao funkcija od vremena $t$ je

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Možemo da se oslobodimo parametra $t$ i dobijemo jednačinu trajektorije, gde će $y$ biti funkcija od $x$. Vreme $t$ možemo da izrazimo iz jednačine za $x$ prosto tako što uzmemo sve sa desne strane što nije $t$ i prebacimo na levu stranu.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Zamenom $t$ u jednačini za $y$ dobijamo

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 \cos\theta})^2 + H,$$

odnosno kad se sredi

$$y = H + x \operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}.$$

## 2.2 Nišanjenje

Zanima nas da li vulkan može da pogodi neku tačku $(x, y)$ u kojoj se nalazi Perica. Posmatramo jednačinu trajektorije i primećujemo da je ugao $\theta$ jedina nepoznata. Naime, $H$ i $v_0$ su unapred zadate vrednosti, $x$ i $y$ su definisane Pericinom pozicijom, a $g$ je viša sila. Možemo da probamo da nađemo ugao pod kojim je potrebno da vulkan ispali užareni kamen da bi pogodio poziciju $(x, y)$ na kojoj se nalazi Perica.

Primenimo trigonometrijski identitet $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ i dobijamo sledeću jednačinu

$$y = H + x \operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} \sec^2\theta,$$

od koje kada primenimo identitet $\sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + 1$ dobijamo

$$y = H + x\operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(\operatorname{tg}^2\theta + 1).$$

Kada to sredimo, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\theta + x\operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} + H - y = 0,$$

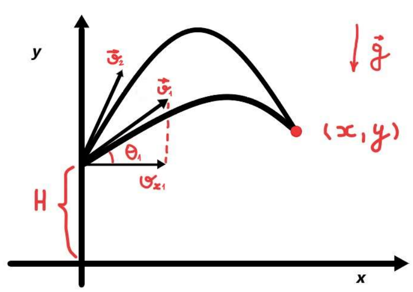
iz koje primenom kvadratne formule za $a = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$, $b = x$ i $c = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + H - y$ možemo da izrazimo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta &= \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(-\frac{gx^2}{2v_0^2})(-\frac{gx^2}{2v_0^2} + H - y)}}{2(-\frac{gx^2}{2v_0^2})}\\ &= \frac{x \mp \sqrt{x^2 - (\frac{gx^2}{v_0^2})(\frac{gx^2}{v_0^2} - 2H + 2y)}}{\frac{gx^2}{v_0^2}}\\ &= \frac{v_0^2 \mp \sqrt{v_0^4 - g^2x^2 + 2Hv_0^2 g - 2yv_0^2 g}}{gx}.\end{aligned}$$

Odavde možemo da dobijemo uglove

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v_0^2 \mp \sqrt{v_0^4 - g^2x^2 + 2Hv_0^2 g - 2yv_0^2 g}}{gx},$$

koji odgovaraju gornjoj i donjoj mogućoj trajektoriji užarenog kamena do pozicije na kojoj se nalazi Perica.




Ugao $\theta$ potreban da bi se pogodila tačka $(x, y)$

Ugao pod kojim vulkan mora ispaliti užareni kamen da bi pogodio Pericu nije baš to što nas sad interesuje. Mi zapravo samo želimo da znamo da li je ta pozicija bezbedna ili nije. Odgovor se krije pod korenom. Naime, ako su rešenja kvadratne jednačine imaginarna, vulkan ne može da dobaci do Perice. Inače, nastrada Perica.

**if** $v_0^4 - g^2x^2 + 2Hv_0^2 g - 2yv_0^2 g < 0$ **then**
  *Bezbedno.*
**else**
  *Opasno po život.*
**end if**

Dakle, ako važi $v_0^4 - g^2x^2 + 2Hv_0^2g - 2yv_0^2g < 0$ pozicija na kojoj se nalazi Perica je bezbedna. Zapravo, taj deo pod korenom je diskriminanta. Kada je diskriminanta jednaka nuli, kvadratna jednačina ima jedinstveno rešenje. Pošto znamo da vulkan ima dve moguće putanje do svake tačke, osim do onih najudaljenijih, izjednačavanjem ove diskriminante sa nulom dobićemo tačnu granicu bezbedne zone oko vulkana.

Umesto toga, mapiraćemo bezbedan i opasan prostor oko vulkana tako što ćemo prostor oko vulkana posmatrati kao matricu i za svako polje matrice ćemo ispitati da li je bezbedno nalaziti se u njemu.

## 2.3 Najveći domet

Postavlja se pitanje, koji prostor oko vulkana bi trebalo da posmatramo? Kada bi uzeli proizvoljnu visinu i širinu, dobili bi, ili preveliki prostor sadrži opasnu zonu, ali pretežno se sastoji iz bezbednih tačaka, ili premali prostor koji ne obuhvata celu opasnu zonu. Želimo da ograničimo prostor koji mapiramo maksimalnom visinom na koju vulkan može da izbaci užareno kamenje i maksimalnom udaljenošću do koje vulkan može da dobaci.

Postoji više načina da odredimo najveći domet vulkana. Možemo da posmatramo uglove koji zaklapaju vektori početne i krajnje brzine užarenog kamena. Primetićemo da će vulkan imati najveći domet [4] kada je površina trougla koji obrazuju ta dva vektora maksimalna. Ispostavlja se da je to pravougli trougao, pa se pitanje dometa svodi na pronalaženje vektora početne i krajnje brzine takvih da zbir ugla izbačaja i ugla doleta užarenog kamena daju prav ugao. No jednostavnije rešenje nam je ispred nosa.

Već smo našli jednačinu za $\operatorname{tg}\theta$ sa kojom vulkan može da pogodi svaku tačku koja mu je u dometu. Na osnovu te jednačine, vulkan može da izabere dve trajektorije do svake tačke, osim do najudaljenije, za koju jednačina ima jedinstveno rešenje. To je upravo ono rešenje za koje je deo pod korenom, odnosno diskriminanta, jednak nuli. Onda imamo jednačinu

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0^2}{gx},$$

koju možemo da uvrstimo u jednačinu trajektorije i dobijemo

$$y = H + x\frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2v_0^2}(\frac{v_0^4}{g^2x^2} + 1).$$

Kako tražimo maksimalni domet kada užareni kamen padne na zemlju, zanima nas vrednost $x_{max}$ kada je $y = 0$, pa važi

$$\begin{aligned} 0 &= H + x\frac{v_0^2}{gx_{max}} - \frac{gx_{max}^2}{2v_0^2}(\frac{v_0^4}{g^2x^2} + 1) \\ &= H + \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx_{max}^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g}. \end{aligned}$$

Kada prebacimo $\frac{gx^2}{2v_0^2}$ na levu stranu i pomnožimo obe strane sa $\frac{2v_0^2}{g}$ dobijamo

$$\begin{aligned} x_{max}^2 &= H\frac{2v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g}\frac{2v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}\frac{2v_0^2}{g} \\ &= \frac{2v_0^2 H}{g} + \frac{2v_0^4}{g^2} - \frac{v_0^4}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2}{g^2}(2Hg + v_0^2). \end{aligned}$$

Sada smo našli

$$x_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{2Hg + v_0^2}.$$

## 2.4 Pucanje u vazduh

Ostalo nam je da nađemo maksimalnu visinu do koje može da dobaci vulkan. Na žalost, sada se ne možemo izvući sa trigonometrijskim trikovima. Obzirom da tražimo maksimalnu visinu koja se dostiže za ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$, tangens $\tan\frac{\pi}{2}$ nam neće biti od velike koristi.

Mogli bi da probamo da sredimo onu diskriminantu, pa da iz nje nađemo tačku u kojoj $y$ dostiže maksimum. Ipak, više volimo da pustimo mašine da urade naš posao umesto nas.

Kako je $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, imaćemo $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$, pa ćemo razmatrati samo kretanje po $y$ osi. Za $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ jednačina brzine $\dot{y} = f(t)$ postaje

$$\dot{y} = v_0 - gt.$$

Odredimo trenutak u kome užareni kamen dostiže najveću visinu. To je trenutak kada brzina $\dot{y}$ postaje nula.

$$0 = v_0 - gt$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Zamenimo $t$ u jednačini položaja $y = f(t)$ da bi odredili maksimalnu visinu.

$$\begin{aligned} y_{max} &= H + v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} \\ &= H + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \\ &= H + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

## 2.5 Zona isključenja

Sada kada možemo da izračunamo maksimalnu visinu i udaljenost do koje vulkan može da dobaci i funkciju pomoću koje možemo da izračunamo da li je opasno nalaziti se u nekoj tački, možemo da mapiramo prostor oko vulkana koji je opasan.

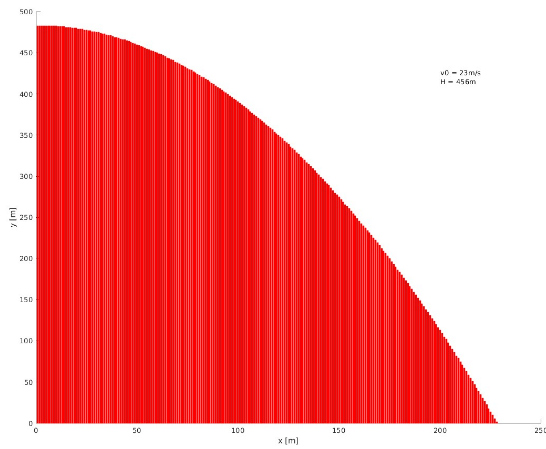
*Ulaz:* visina $H$ i početna brzina $v_0$
*Izlaz:* mapa opasne zone oko vulkana

*Pronađi* maksimalnu udaljenost $x_{max}$
*Pronađi* maksimalnu visinu $y_{max}$
*Napravi* matricu $M$ dimenzija $x_{max} \times y_{max}$

**for** vrsta $i$ u matrici $M$ **do**
  **for** kolona $j$ u redu $i$ matrice $M$ **do**
    $M[i, j] =$ *da-li-je-polje-opasno* $(i, j, v_0, H)$
  **end for**
**end for**

*Nacrtati mapu na osnovu matrice $M$ i obeležiti opasna polja*

Napravićemo mapu opasne zone za vulkan visok $456m$, koji izbacuje užareno kamenje brzinom od $23m/s$.




Opasna zona

Nedostatak ovog rešenja je što smo diskretizovali prostor oko vulkana. Međutim, ako visinu vulkana izrazimo u metrima i brzinu u metrima u sekundi, dobićemo mapu koja će biti tačna do na metar. Ukoliko baš želi, Perica može da koristi i jedinice manje od metra da bi povećao preciznost. Dokle god dosledno koristi iste jedinice L za rastojanje i T za vreme, ne može ništa da pokvari.

Sada nam ostaje da pošaljemo Pericu da eksperimentalno proveri koliko je model koji smo dobili tačan.

# 3 Nepraktično rešenje

U međuvremenu, Perica razgovarao sa Zoricom i saznao je da postoje metaheuristike koje se uspešno primenjuju za rešavanje veoma širokog spektra problema. Naravno, tražio je da iskoristimo neku metaheuristiku da pronađemo bezbednu zonu oko vulkana. Nakon duge i mukotrpne rasprave, sa dosta loše buke, nismo uspeli da ubedimo Pericu da ne može dobiti bolje rešenje od ovog koje smo već našli. Perica je hteo da vidi metaheuristike na delu.

Posmatrajmo jednačinu trajektorije u implicitnom obliku.

$$y - H - x \operatorname{tg} \theta + \frac{gx^2 \sec \theta^2}{2v_0^2} = 0$$

Tražićemo maksimalnu vrednost $x$ za zadato $y$ tako da ova jednačina bude zadovoljena. Maksimalno $x$ će zavisiti i od parametra $\theta$, tako da za svaki par $(x, y)$ u pretrazi, moramo proveriti da li postoji $\theta$ tako da jednačina trajektorije užarenog kamenja bude zadovoljena.

Dakle, za neko $y$, tražimo maksimalno $x$, za koje postoji $\theta$ tako da je jednačina zadovoljena.

Na kom intervalu za $y$ ćemo vršiti pretragu? Za donju granicu intervala možemo uzeti $y_{min} = 0$, ali koju vrednost da uzmemo za $y_{max}$?

Setimo se da smo $y$ izrazili u parametarskom obliku kao funkciju od vremena $t$. Zanima nas $y_{max}$ koje se dostiže za $\theta = \frac{\pi}{2}$, pa je $\sin \theta = 1$. To nam ostavlja jednačinu vertikalnog hitca.

$$y = H + v_0 * t - \frac{1}{2} g t^2$$

Odatle tražimo $t$ za koje se dostiže $y_{max}$. Kada imamo $t$ možemo direktno da izračunamo $y_{max}$. Sada imamo ceo interval za $y$ osu na kome vršimo pretragu.

## 3.1 Cena uspeha

Bez obzira na to za koju metaheuristiku se odlučimo, moramo nekako znati da li je neko novo rešenje koje smo našli bolje od ostalih. Potrebna nam je mera koja će nam reći da li je jedno rešenje bolje od drugog. Tu meru će nam dati funkcija cene.

Odredimo funkciju cene za ugao $\theta$. Zadate su nam $x$ i $y$ koordinate koje vulkan treba da pogodi. Želimo da jednačina trajektorije za $\theta_{novo}$ bude bliža nuli nego jednačina za $\theta_{staro}$ vrednost.

$$|y - H - x \operatorname{tg} \theta_{novo} + \frac{gx^2 \sec {\theta_{novo}}^2}{2v_0^2}| < |y - H - x \operatorname{tg} \theta_{staro} + \frac{gx^2 \sec {\theta_{staro}}^2}{2v_0^2}|$$

U opštem smislu, taj uslov nam je dovoljan da znamo da li je vrednost $\theta_{novo}$ bolja od $\theta_{staro}$ vrednosti. Sa druge strane, hteli bi smo da se zaštitimo od minimalnih oscilacija u rešenju koje ne daju značajan doprinos pretrazi i mogu se svesti na neku $\epsilon$ računsku grešku.

$$\epsilon < ||y - H - x \operatorname{tg} \theta_{novo} + \frac{gx^2 \sec {\theta_{novo}}^2}{2v_0^2}| - |y - H - x \operatorname{tg} \theta_{staro} + \frac{gx^2 \sec {\theta_{staro}}^2}{2v_0^2}||$$

Konačno, obzirom da je $\theta$ ugao, potrebno je da ograničimo domen za pretragu, recimo od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, kako se pretraga ne bi vrtela u krug.

Sada možemo da pređemo na fukciju cene za koordinatu $x$. Očigledan uslov koji mora da važi za vrednost $x_{novo}$ je da mora biti veća od $x_{staro}$ vrednosti.

$$x_{staro} < x_{novo}$$

Taj uslov je neophodan, ali ne i dovoljan da bi znali da je $x_{novo}$ bolje rešenje. Moramo da uradimo još neke provere. Zanima nas da li postoji neko $\theta$ za $(x_{novo}, y)$ tačku. Problem sa metaheuristikama je u tome što mogu da nađu optimalno rešenje, ali ako ga ne nađu, vratiće nešto. Pri tome, metaheuristika ne zna da to nije najbolje rešenje.

Način da se taj problem prevaziđe je da u jednačini trajektorije zamenimo vrednosti za $x_{novo}$, $y$ i $\theta$ i vidimo da li je jednaka nuli. Međutim, pošto metaheuristika ne mora uvek da pronađe baš tačno rešenje, ali može da nađe neko koje je dosta blizu, dopustićemo da jednačina trajektorije bude manja od neke $\kappa$ greške.

$$y - H - x_{novo} \operatorname{tg} \theta + \frac{g x_{novo}^2 \sec \theta^2}{2 v_0^2} < \kappa$$

Kada $x_{novo}$ zadovolji i taj uslov, onda znamo da je sigurno bolje od $x_{staro}$ rešenja.

Konačno, funkcija cene za $t$.

$$H + v_0 * t_{staro} - \frac{1}{2} g t_{staro}^2 < H + v_0 * t_{novo} - \frac{1}{2} g t_{novo}^2$$

Naravno, za $x$ i za $t$ mogu da se dodaju donje granice promene kako bi se ubrzala pretraga i odstranile male oscilacije u rešenju.

## 3.2 Duša mašine

Sada kada znamo šta je bolje rešenje, možemo da pređemo na izbor metaheuristike. Postoji jako puno metaheuristika. Uopšteno, možemo ih podeliti na $S$-metaheuristike i $P$-metaheuristike. Osnovna razlika je u tome što $P$-metaheuristike održavaju skup najboljih rešenja, dok $S$-metaheuristike uvek biraju jedno najbolje rešenje i njega unapređuju. $P$-metaheuristike su postale posebno poznate kada je 2006. pomoću evolucionog algoritma NASA dizajnirala antenu [2] za ST5 svemirsku letilicu.

U praksi, algoritmi iz ove dve klase se često kombinuju. Na primer možemo da pustimo $P$-metaheuristiku da nađe neko rešenje, a onda da pustimo $S$-metaheuristiku da to rešenje unapredi. Mi ćemo iskoristiti VNS [3] metaheuristiku iz klase $S$-metaheuristika.

Osnovna ideja VNS metaheuristike je da u nekom okruženju trenutnog rešenja tražimo bolje rešenje. Ukoliko pronađemo bolje rešenje u nekom okruženju, onda prelazimo u to rešenje i pretražujemo njegova okruženja. Ukoliko u nekom okruženju ne pronađemo rešenje, prelazimo na sledeće okruženje.

*Izabrati* $k_{max}$ okolina $N$
*Izabrati* početno rešenje $S$

**while** uslov zaustavljanja nije zadovoljen **do**
    $k = 1$
    **while** $k \leq k_{max}$ **do**
        $Sp$ = *promućkaj* $(S, N[k])$
        **if** $Sp$ je bolje od $S$ **then**
            $S = Sp$
            $k = 1$
        **else**
            $k = k + 1$
        **end if**
    **end while**
**end while**

U najopštijem obliku ovog algoritma, nakon mućkanja, upotrebili bi neki drugi, obično deterministički, algoritam pretrage sa početnim rešenjem $Sp$, što bi nam dalo rešenje $Spp$ koje bi dalje proveravali. Za funkcije koje optimizujemo, taj drugi algoritam koji koristimo unutar VNS metaheuristike bi rešio ceo problem. Zato preskačemo taj deo i koristimo redukovanu VNS metaheuristiku.

Kako odabrati uslov zaustavljanja? Idealno, metaheuristika bi trebala da se zaustavi kada pronađe globalni optimum. Imamo samo jedan mali problem. U opštem slučaju, problem zaustavljanja nije odlučiv. Metaheuristika ne zna kada je stigla do globalnog optimuma.

Napredniji pristupi ovom problemu broje iteracije i na osnovu neke raspodele odlučuju kolika je verovatnoća da će naći bolje rešenje. Za potrebe našeg problema, da ne bi zbunjivali Pericu sa verovatnoćama, fiksiraćemo maksimalan broj iteracija i maksimalan broj iteracija bez promene rešenja.

Izbor okolina je posebno važan deo ove metaheuristike i dosta utiče na to da li će i koliko brzo metaheuristika iskonvergirati ka rešenju. Suprotno uobičajenom pristupu da se krene od manje okoline ka većoj, mi ćemo prvo pretraživati veće okoline. Razlog za to se krije u funkcijama koje optimizujemo. Naše funkcije imaju jedan, najviše dva jednaka optimuma. Onda se rešavanje problema svodi na problem penjanja na brdo. Zato želimo da se što je moguće većim koracima približimo vrhu, a tek onda usporimo i manjim koracima pronađemo sam vrh brda.

## 3.3 Promućkano, ne promešano

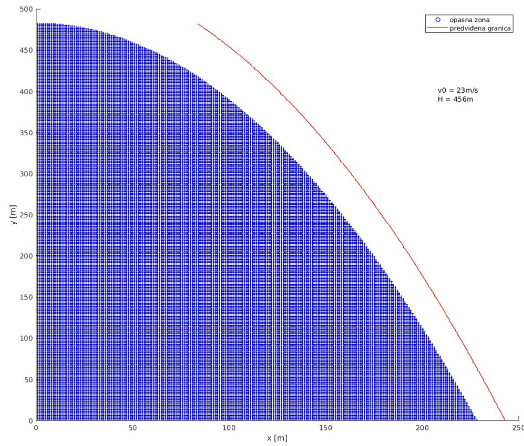
Specifičan deo VNS metaheuristike jeste mućkanje. U ovom koraku iz neke $k$ okoline rešenja $S$ biramo novo potencijalno rešenje $Sp$. Kako će to izgledati dosta zavisi od toga kakav problem rešavamo. Ovako kako smo mi postavili zadatak, naši problemi su jednodimenzioni i neprekidni.

*Izabrati* slučajnu vrednost $rand$ na intervalu $[-1, 1]$
$Sp = S + k \cdot rand$

Ovaj deo je dosta sličan biranju pivota u algoritmu *QuickSort*. Sa jedne strane, poželjno je da se izvršava što brže, a sa druge da dobijemo što je moguće bolje potencijalno rešenje. Ne želimo da mućkanje pretvorimo u mešanje temeljnom pretragom. Slično kao i prilikom izbora pivota u *QuickSort*-u, uzećemo nasumično neku tačku iz date okoline.

## 3.4 Zona isključenja

Sada imamo sve što nam je neophodno da pronađemo granicu opasne zone oko našeg vulkana na visini $456m$ koji izbacuje užareno kamenje brzinom od $23m/s$. Pokrećemo program i čekamo par minuta da pronađe rešenje.




Opasna zona i predviđena granica

Dobili smo tu krivu koju smo i očekivali da ćemo dobiti. Primetimo da je ceo graf malko pomeren udesno. To se desilo zato što smo dozvolili da se rešenja pronalaze sa nekom greškom. Optimizator je našao maksimalno rešenje, pa je maksimizovao i grešku. Bez obzira na to, ovo rešenje je sasvim bezbedno. Naime, optimizator je maksimizovao rastojanje na koje vulkan može da izbaci kamen i to rastojanje je uvećao za dozvoljenu marginu. Stoga, ovaj model uključuje bezbednosnu marginu, tako da možemo mirno da spavamo znajući da Perica neće nastradati od užarenog kamenja.

# 4 Analiza i zaključak

U ovom radu opisali smo dva načina da se odredi bezbedna zona u kojoj Perica može da leti i gde može da se prizemlji u okolini aktivnog vulkana. Naravno, predložena rešenja nisu savršena. Svaka pretpostavka koju smo na početku napravili se može posmatrati kao mana ovih rešenja.

Pre svega nismo uračunali otpor vazduha. Užareno kamenje u našem modelu se kreće u gravitacionom polju koje je konzervativna sila. Otpor vazduha, sa druge strane, je disipativna sila i kao takav predstavlja potpuno drugačiju zver. Deo energije koji bi se potrošio na savladavanje otpora vazduha ne bi mogao da se nadoknadi vraćanjem u polaznu tačku. Ukoliko bismo želeli da napravimo model koji će biti validan za transsonične i supersonične brzine, onda bi silu otpora vazduha izražavali kao polinom drugog stepena, odnosno trećeg stepena za hipersonične brzine. [7] To bi dalo diferencijalne jednačine koje nemaju analitičko rešenje. Dalje izučavanje ponašanja tih sistema bi zahtevao nešto drugačiji pristup, mada mapiranje rešenja i optimizacija su metode koje bi imale svoju primenu i u tom slučaju. Sa druge strane, model koji smo dobili je potpuno bezbedan. Otpor vazduha će samo smanjiti domet vulkana.

Gravitacija na malim visinama na planeti Zemlji se može posmatrati kao konstantna bez opasnosti da se napravi velika greška. Gravitaciono ubrzanje je, međutim, obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja od izvora gravitacionog polja. Šta ako Perica odluči da leti oko vulkana koji izbacuje užareno kamenje brzinama koje se približavaju $7.8 km/s$? Šta ako Perica reši da fotografiše vulkan na nebeskom telu koje ima manju masu od Zemlje? Gravitaciono ubrzanje je proporcionalno masi planete. U tim slučajevima Perica ne bi imao mnogo koristi od našeg modela. Naravno, tada ne bi mogli ni da ignorišemo efekte koji nastaju usled rotacije sistema, kao ni činjenicu da je površina planete zakrivljena. U slučaju da odluči da leti oko aktivnog galaktičkog jezgra, od našeg modela Perica ne bi imao baš nikakve koristi.

Na kraju, prilikom rešavanja problema pomoću metaheuristika, jako je važno obratiti pažnju na izbor parametara. Ukoliko izaberemo previše mali broj iteracija, metaheuristika neće stići da iskonvergira ka željenom rešenju. Ukoliko izaberemo previše veliki broj iteracija, metaheuristika će bespotrebno nastaviti da se vrti u petlji i kada nađe rešenje. Izbor dozvoljene greške u funkciji cene takođe može imati veliki uticaj na konačno rešenje. Konačno, izbor skupa okolina je jedan od ključnih faktora koji utiču na efikasnost VNS metaheuristike. Sve u svemu, metaheuristike su veoma moćan alat sa kojim možemo da rešavamo veoma širok spektar problema, ali nipošto ih ne treba doživljavati kao čarobni štapić koji jednim potezom rešava sve probleme.

# Literatura


[1] Dean Hickerson. oscillator stamp collection.

[2] Gregory Hornby, Al Globus, Derek Linden, and Jason Lohn. Automated antenna design with evolutionary algorithms. In *Space 2006*, 2006.

[3] N. Mladenović and P. Hansen. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 1997.

[4] Philip Robinson. 82.25 on the geometrical approach to projectile motion. *The Mathematical Gazette*, 1998.

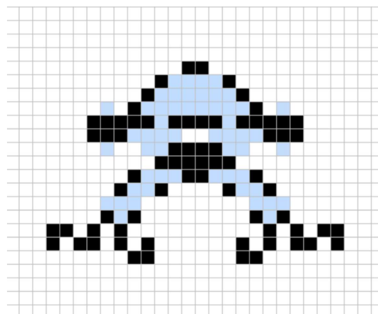
[5] Залгаллер В.А. *Теория огибающих.* Наука, 1975.

[6] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Теоретическая физика. В 10 томах. Том 01. Механика.* ФМЛ, 5 edition, 2004.

[7] Сазонов Алексей Александрович Мельников Петр Николаевич. Моделирование траектории полета артиллерийского снаряда, 2018.


# A Dodatak - model Vulkana u igri života

Deen Hcikerson je 1995. otkrio prvi teški vulkan [1] u igri života koji proizvodi varnice.



Vulkan u igri zivota

Vulkan prikazan na slici je oscilator sa periodom 5 i populacijom koja varira od 56 do 74 ćelije. Polja plave boje označavaju opasnu zonu.

# B Dodatak - parabola bezbednosti

Granicu opasne zone smo mogli da odredimo i eksplicitno kao obvojnicu [5] svih mogućih trajektorija užarenog kamenja. Označimo sa $f_\theta(x, y) = 0$ implicitnu jednačinu trajektorije kao funkciju od $x$ i $y$ koja zavisi od parametra $\theta$. Takvu funkciju možemo posmatrati i kao familiju funkcija $F(x, y, \theta) = 0$, koja u našem slučaju predstavlja sve moguće trajektorije užarenog kamenja koje izbacuje vulkan.

Obvojnica se definiše kao skup svih tačaka $x$ i $y$ za koje postoji neko $\theta$ tako da važi

$$F(x, y, \theta) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0.$$

Vratimo se na implicitni oblik trajektorije užarenog kamenja.

$$F(x, y, \theta) = fracgx^2 2v_0^2 + y - H - x \,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{gx^2}{2v_0^2}\,\mathrm{tg}^2\,\theta = 0$$

Diferenciramo.

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -x \sec^2\theta + \frac{gx^2}{2v_0^2} 2\,\mathrm{tg}\,\theta \sec^2\theta = 0$$

Oslobađamo se $\sec^2\theta$ i sređujemo izraz.

$$-x + \frac{gx^2}{v_0^2}\,\mathrm{tg}\,\theta = 0$$

Iz ove jednačine izražavamo

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_0^2}{gx},$$

sa kojim vršimo zamenu u $F(x, y, \theta)$ i sređujemo izraz.

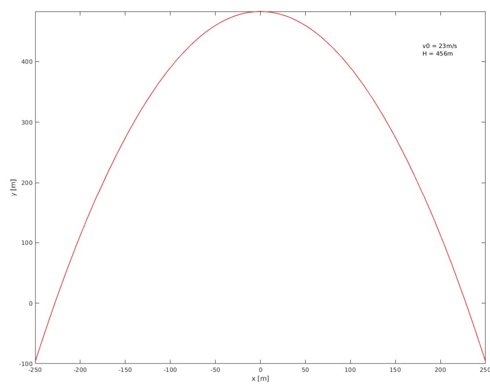
$$y - H - x\frac{v_0}{gx} + \frac{gx^2}{2v_0} + \frac{gx^2}{2v_0}\frac{v_0^2}{g^2x^2} = 0$$

$$y - \frac{v_0^2}{g} - H + \frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} = 0$$

$$y - \frac{v_0^2}{2g} - H + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0$$

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} + H$$

Poslednju jednačinu koju smo dobili nazivamo parabolom bezbednosti. Sada se pitanje bezbedne zone svodi na proveru da li se tačka nalazi iznad ili ispod parabole.




Parabola bezbednosti

Pošto je ovo parabola, prostire se i na negativne ose. Fizički smisao imaju samo pozitivne vrednosti iz prvog kvadranta. Sa druge strane, vulkan može da ispaljuje užareno kamenje i levo i desno, pa onda ima smisla posmatrati i negativan deo $x$ ose.

Kada bi iz diskriminante izrazili $y$, dobili bi istu jednačinu parabole.