Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Seminarski rad iz predmeta Osnove Matematickog Modeliranja

Let kamena kroz otvor u Zemlji

Mentor:
dr Zorica Dražić

Studenti:
Damjan Stanković 14/2019
Borislav Krgović 453/2018

1 Opis Problema

Pretpostaviljamo da je gustina Zemlje ista svuda i da je kroz Zemlju do druge strane iskopana rupa. Sa površine Zemlje se pusti kamen u rupu i on krene da pada ka Zemljinoj sredini. Modeliramo kretanje kamena kroz rupu i izračunaćemo za koje vreme kamen stigne do druge strane Zemlje.
U modelu zanemarujemo otpor vazduha (implementacija bi bila izuzetno komplikovana zbog promene gustine medijuma od centra ka ivicama), kao i kosmička kretanja Zemlje, da ne bismo morali voditi računa o ne linijskom kretanju objekta.

2 Fizička formulacija

Za rešavanje ovog problema prvo je potrebno opisati uticaj gravitacije na telo koje se nalazi unutar zemlje, za sta ce pomoći teorema ljuske i univerzalni zakon gravitacije.

Teorema 1 (Teorema ljuske)**.** *[1]*

1. Sferan simetricni objekat gravitaciono utiče na drugi objekat kao da mu je sva masa koncentrisana u centru.
2. Ako je objekat simetricna sferna ljuska (šuplja lopta) tada je ukupna gravitaciona sila na telo unutar objekta nula.

Univerzalni zakon gravitacije. *[1] Univerzalni zakon gravitacije tvrdi da je gravitaciona sila izmedju dva tela srazmerna njihovim masama(m i M), a obrnuto srazmerna kvadratu njihovog rastojanja d(G je gravitaciona konstanta):*

$$F = \frac{GMm}{d^2} \tag{1}$$

Iz ovoga se može izvesti sila gravitacije za telo unutar zemlje. Ako podelimo zemlju na 2 dela: unutrašnji koji je lopta poluprečnika r koji predstavlja udaljenost tela do centra zemlje i spoljašnji koji je šuplja sfera od tela do poluprečnika Zemlje R. Iz teoreme ljuske dobijamo da je uticaj gravitacije spoljašnjeg dela na telo nula i onda računamo uticaj gravitacije na telo preko formule iz univerzalnog zakona gravitacije[1]:

$$F_r = \frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

Gde je M masa unutrašnje sfere a m masa tela, dalje zamenimo u formulu masu sfere i dobijamo

$$F_r = G\rho\frac{4\pi}{3}r^3m\frac{1}{r^2} = G\rho\frac{4\pi}{3}r \tag{3}$$

U ovom trenutku fizičari svedu oblik jednacine na:

$$F = -kr \tag{4}$$

Gde je k konstanta i pozovu se na Hukov zakon i kažu da je ovo harmonijsko kretanje perioda oscilacije $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$[2].
Ali pošto smo mi matematičari, dalje će nam trebati izračunavanje potencijalne energije. Potencijalna energija se definiše kao rad potreban da se objekat pomakne iz tačke u beskonačnosti do tačke u kojoj je unutar gravitacionog polja[3]:

$$U = -\int_{\infty}^{R} F dr \tag{5}$$

Zatim definišemo iz zakona o održanju energije[4] da je promena potencijalne energije jednaka promeni kinetičke energije.[5] Kako je kinetička energija u početnom trenutku 0 onda je kinetička energija baš jednaka promeni potencijalne.

$$E_k(x) = \Delta U(x)$$

3 Formiranje modela

Prvo skaliramo položaj x(t) sa kojim radimo tako što ga delimo sa R i dobijemo interval [0,1], odnosno $r(t) = x(t)R$.
Dalje izračunajmo potencijalnu energiju tela u početnom položaju:

$$U = -\int_{\infty}^{R} -\frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{R}$$

Sada računamo potencijalnu energiju u tački položaja $x \in (0, 1)$.

$$U(x) = -\int_{R}^{xR} -Gm\rho\frac{4\pi}{3}rdr + \int_{\infty}^{R}\frac{GMm}{r^2}dr = \int_{R}^{xR} Gm\rho\frac{4\pi}{3}rdr + U.$$

Sada primetimo iz formule:

$$\Delta U(x) = U - U(x)$$

$$\Delta U(x) = -\int_R^{xR} Gm\rho\frac{4\pi}{3}rdr = \int_x^1 RGm\rho\frac{4\pi}{3}tdt =$$

$$= RGm\rho\frac{2\pi}{3}t^2|_x^1 = RGm\rho\frac{2\pi}{3}(1-x^2)$$

Zakon očuvanja energije kaže da je $E_k(x) = \Delta U(x)$, moramo izračunati $E_k(x)$ znajući da je

$$E_k(r) = \frac{mv(r)^2}{2},$$

odnosno sa smenom:

$$r(t) = x(t), \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{R}\frac{dr}{dt}(t)R, v(r) = \frac{dr}{dt}(t),$$

$$E_k(x) = \frac{Rm}{2}\frac{dx}{dt}(t)^2,$$

$$\frac{Rm}{2}\frac{dx}{dt}(t)^2 = RGm\rho\frac{2\pi}{3}(1-x(t)^2),$$

$$\frac{dx}{dt}(t)^2 = G\rho\frac{4\pi}{3}(1-x(t)^2),$$

$$x'(t)^2 = G\rho\frac{4\pi}{3}(1-x(t)^2),$$

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}} = \pm\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}.$$

Rešićemo dve diferencijalne jednačine:

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}} = \sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}} = -\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}$$

Primetimo da ako je f rešenje prve, onda je -f rešenje druge, pa je dovoljno rešiti jednu.

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}} = \sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}},$$

$$\int\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}}dt = \int\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}dt,$$

$$arcsin(x(t)) = \sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}t + c$$

$$x(t) = \sin(\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}t + c).$$

Za drugu diferencijalnu jednačinu dobijamo familiju rešenja:

$$x(t) = -\sin(\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}t + c),$$

ali kako je:

$$\sin h = -\sin(h + \pi),$$

to je ista familija rešenja. Kada dodatno uzmemo u obzir početni uslov da je $x(0) = 1$ dobijamo $c = \frac{\pi}{2}$:

$$x(t) = \cos(\sqrt{G\rho\frac{4\pi}{3}}t)$$

Formulu za stvarni položaj dobijamo:

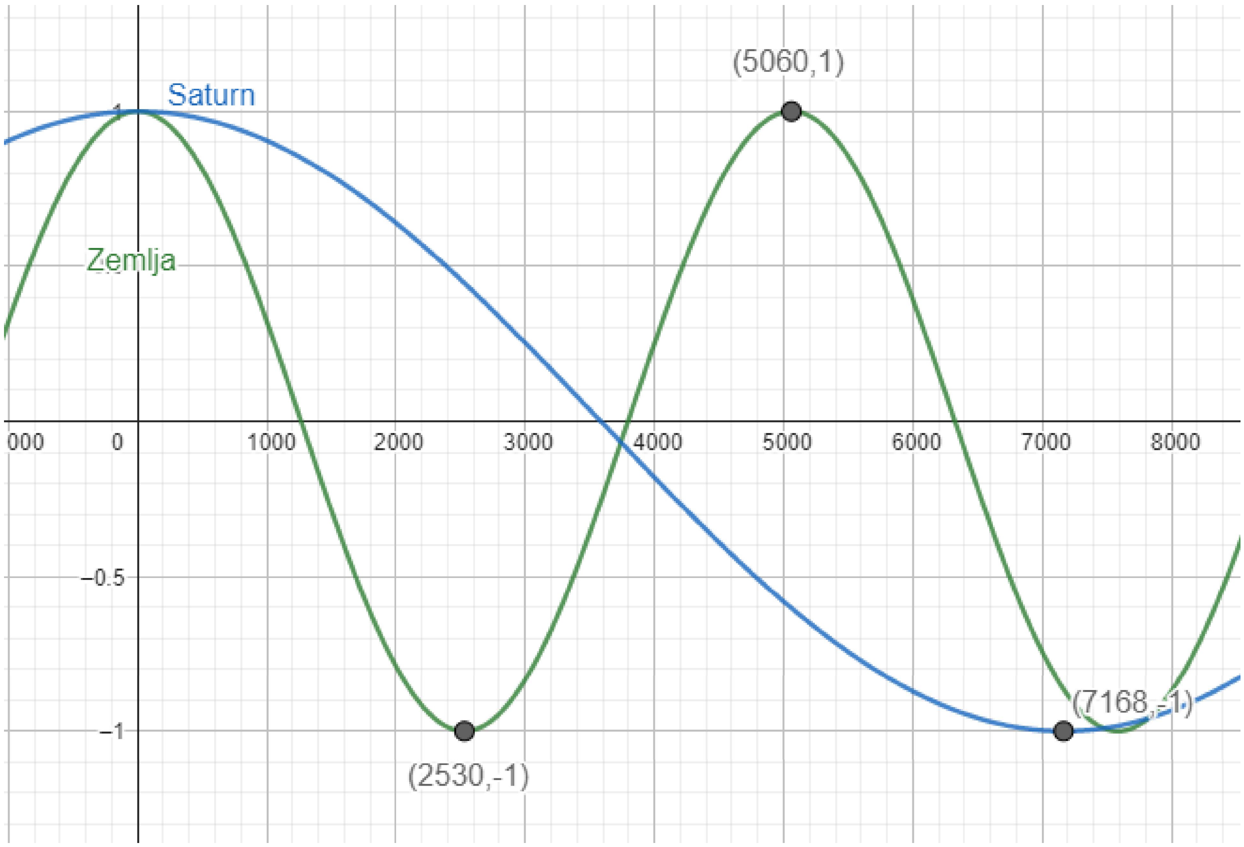
$$r(t) = \vec{r_0}x(t),$$

gde je $\vec{r_0}$ vektor početnog položaja. Iz činjenice da je $x(t)$ kosinusna kriva zaključujemo da je kretanje periodično, te da je period kretanja $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}s$, a vreme prolaska do druge strane Zemlje je $T_p = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}s$.

4 Rezultati

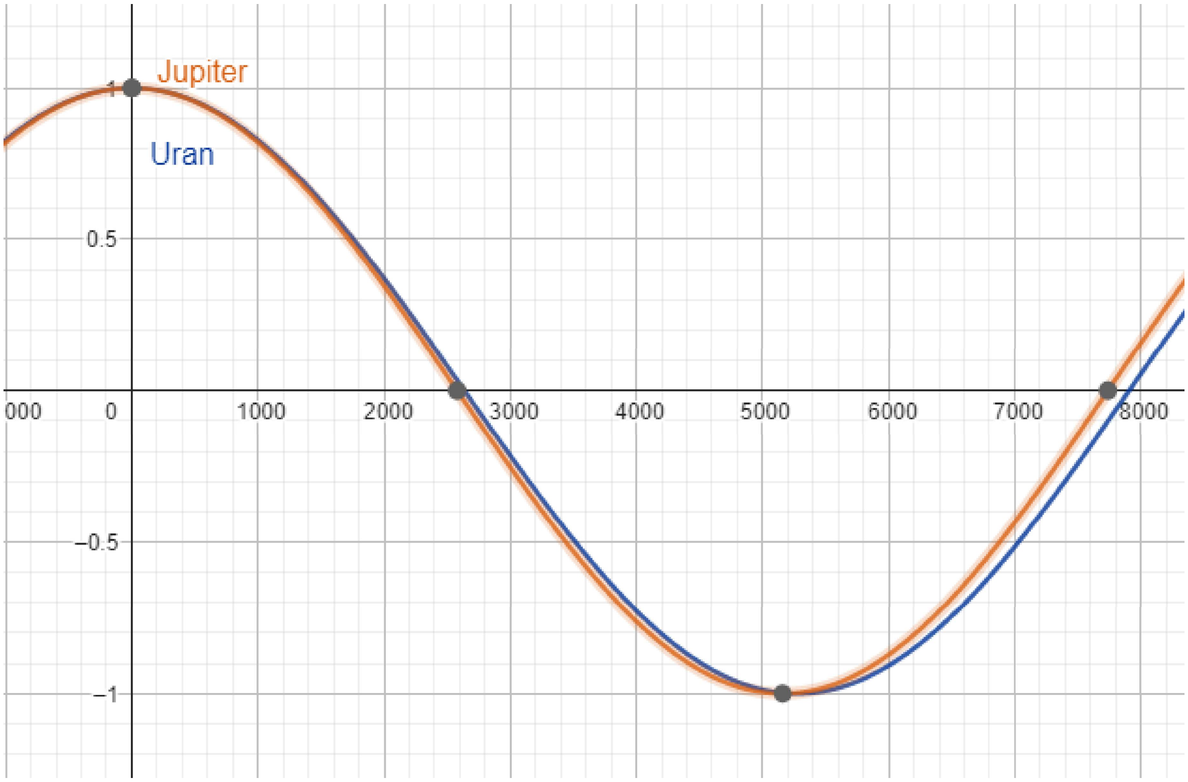
Za prvi rezultat u jednačinu unosimo gustinu Zemlje $\rho = 5514\frac{kg}{m^3}$[6] i dobijemo da je kamenu potrebno $\approx$ 42 minuta da dođe do druge strane Zemlje.
Sledeće su slike kosinusnih krivi za razlicite gustine planeta koje su preuzete sa sajta NASA-e[6], na grafiku Saturna i Zemlje su istaknuti ekstremumi zaokruženi na 4 cifre dok za analizu grafika Urana i Jupitera nisu potrebne:

Zemlja i Saturn



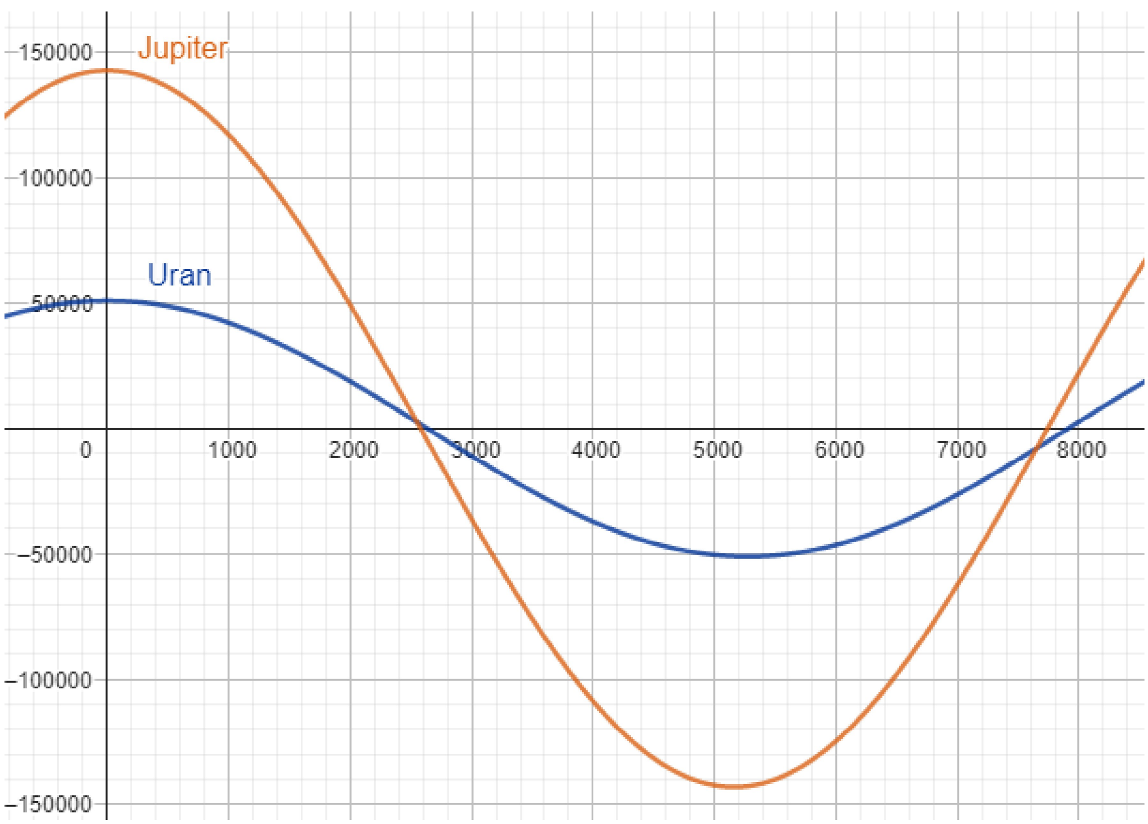
Slika 1.Putanja kamena kroz Zemlju i Saturn

Uran i Jupiter



Slika 2.Putanja kamena kroz Uran i Jupiter

Skalirani Uran i Jupiter



Slika 3.Skalirana putanja kroz Uran i Jupiter

5 Analiza

Rezultate smo zaokruživali na 4 cifre zato što na sajtu NASA-e nigde nije bila zapisana tačnost a date su nam 4 cifre. Iz same formule funkcije x(t) mozemo primetiti da vreme putovanja kamena zavisi samo od gustine planete kroz koju propada što dovodi do interesantnih zaključaka. Prva slika očekivano pokazuje da ce put kroz Zemlju trajati mnogo kraće nego put kroz Jupiter ali kada pogledamo drugu sliku vidimo da su putevi kroz Jupiter i Uran jako slični iako Jupiter ima skoro 3 puta veći prečnik od Urana. I kao što vidimo sa slike 3 kada skaliramo sa grafike sa prečnicima Urana i Jupitera vidimo da se telo mnogo brze krece kroz Jupiter nego Uran kao što je i očekivano kada gledamo sliku 2.

Literatura

[1] "5.5: Newton's Law of Universal Gravitation." Physics LibreTexts, 5 Nov. 2020, https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_Physics_(Boundless)/5%3A_Uniform_Circular_Motion_and_Gravitation/5.5%3A_Newtons_Law_of_Universal_Gravitation

[2] Nave, R. "Journey through the Center of the Earth." Hole Through the Earth Example,http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Mechanics/earthole.html

[3] Nave, R. "Gravitational Potential Energy." Gravitational Potential Energy,http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/gpot.html

[4] "Conservation of Energy."Wikipedia, 3 May 2023,https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_of_energy.

[5] "Physics with Calculus/Mechanics/Energy and Conservation of Energy."Wikibooks, Open Books for an Open World, 24 Jan.2023,https://en.wikibooks.org/wiki/Physics_with_Calculus/Mechanics/Energy_and_Conservation_of_Energy.

[6] Williams, David; R. "Planetary Fact Sheet." NASA,https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/.