Jednačina u kojoj figuriše nezavisna promenljiva $x$, funkcija $y$ i njeni izvodi $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ naziva se diferencijalnom jednačinom $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Zadatak je da se odredi nepoznata funkcija $y$, tj. rešenje DJ je funkcija $y = f(x)$ koja je zadovoljava $\forall x$.

Opšte rešenje DJ $F(x, y, y') = 0$ je familija funkcija $y = \varphi(x, C)$ koje zavise od proizvoljne konstante $C$ i koje zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, y') = 0$ za svako $x$.
Za dati početni uslov $(y = y_0$ za $x = x_0)$ postoji $C = C_0$ takvo da $y = \varphi(x, C_0)$ zadovoljava taj početni uslov i ovo rešenje je partikularno rešenje.

# DJ sa razdvojenim promenljivim

Oblik: $f(x)dx + g(y)dy = 0$

$\Rightarrow f(x)dx = -g(y)dy \quad /\int$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -\int g(y)dy + C$

Primer: $y' = \frac{x+1}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = (x+1)dx \quad /\int$

sve sa $y$ prebacimo uz $dy$
i sve sa $x$ uz $dx$

$\int y^2 dy = \int (x+1)dx + C$

$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + x + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 3x + 3C}$ opšte rešenje

# LINEARNA DJ PRVOG REDA

max → Red izvoda koji se javlja u jednačini

linearna po $y$!

Oblik. $y' + P(x)y = Q(x)$, $P(x)$ i $Q(x)$ neprekidne fje

Rešenje je oblika: $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

Primer: $xy' - 2y = 2x^4$

$\Rightarrow y' \underbrace{- \frac{2}{x}}_{P(x) = -\frac{2}{x}} \cdot y = \underbrace{2x^3}_{Q(x) = 2x^3}$ (zapišemo u gornjem obliku)

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\int -\frac{2}{x}dx} \cdot \left( \int 2x^3 \cdot e^{\int -\frac{2}{x}dx} dx + C \right)$$

$= \ldots$ (reše se ovi integrali)

# HOMOGENE LINEARNE DJ DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Oblik $y'' + py' + qy = 0$ ← homogena

- drugog reda zbog drugog izvoda
- linearna po $y$
- $p$ i $q$ su konstante (konst koeficijenti)

Formira se KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA

$(y'' \to \lambda^2, \ y' \to \lambda, \ y \to 1)$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$

DJ je drugog reda pa je ovo kvadratna jednačina.
U zavisnosti od korena (nula) kar. jednačine, razlikujemo 3 slučaja

1° Koreni su realni i različiti. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2$
Opšte rešenje je oblika: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2° Koreni su realni i jednaki. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 = \lambda_2 = s$
Opšte rešenje je oblika. $y = (C_1 + C_2 x) e^{sx}$

3° Koreni su kompleksni. $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$
OR je oblika: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Partikularna rešenja bi se dobila od opštih tako što se na osnovu DVA zadata početna uslova izračunaju $C_1$ i $C_2$

↓
Red DJ

# NEHOMOGENE LINEARNE DJ DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Oblik $\underbrace{y'' + py' + qy}_{\text{isto kao kod homogene}} = f(x)$ ← nije 0 (nehomogena)

Opšte rešenje ove DJ je zbir opšteg rešenja $y_H$ odgovarajuće homogene jednačine $(y''+py'+qy=0)$ i jednog partikularnog rešenja $y_P$ polazne jednačine, tj $y = y_H + y_P$.

$y_H$ se određuje kao sa prethodne strane.

Jedan od načina da se odredi $y_P$ je sledeći.

Ako je $f(x)$ oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_\ell(x)\sin\beta x\right]$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_\ell(x)$ polinomi stepena $n$ i $\ell$, tada $y_P$ je oblika

$$y_P = x^m \cdot e^{\alpha x}\left[(a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_0)\cos\beta x + (b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + b_0)\sin\beta x\right]$$

gde je $p = \max\{n, \ell\}$, a $m$ se određuje na sledeći način.

- ako $\alpha + i\beta$ nije koren karakteristične jednačine $\Rightarrow m = 0$
- ako je $\alpha + i\beta$ jednostruki koren kar. jednačine $\Rightarrow m = 1$
- ako je $\alpha + i\beta$ dvostruki koren kar. jednačine $\Rightarrow m = 2$

Izraz $y_P$ dobijen na ovaj način diferenciramo da dobijemo $y_P'$, $y_P''$ i to sve vratimo u polaznu jednačinu kako bi odredili $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_p$