NA1 A - Test 2, 26.12.2019.

1. Neka je A realna, kvadratna matrica reda n i neka su sa $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ date dve različite QR dekompozicije matrice A.
(a)(1 poen) Dokazati da je $Q_2^TQ_1$ ortogonalna matrica.
(b)(2 poena) Dokazati da je $Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$.
(c)(2 poena) Neka je $B = Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$. Kakvog oblika je matrica B (struktura matrice i vrednosti)?
(d)(2 poena) Ako je A matrica reda $n = 5$, koliko različitih QR dekompozicija ($Q, R \in \mathbb{R}^{5\times5}$) matrice A postoji ?

2. (4 poena) Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A i $x_1, ..., x_n$ njima odgovarajući sopstveni vektori. Neka važi $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$ i $v_0 = \alpha_3x_3 + \sum\limits_{i=5}^{n} \alpha_ix_i,\ \alpha_3, \alpha_5, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ispitati konvergenciju metode proizvoljnog vektora počevši od vektora v_0.

3. (4 poena) Koristeći Geršgorinovu teoremu dokazati da ako je matrica strogo dijagonalno-dominantna onda je ona i invertibilna. Napomena: nije potrebno dokazivati Geršgorinovu teoremu.

4. bonus pitanje (3 poena) Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Odrediti matricu $B = A^{103} - 4A^{102} + A^{101} + 6A^{100}$.

NA1 A - Test 2, 26.12.2019.

1. Neka je A realna, kvadratna matrica reda n i neka su sa $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ date dve različite QR dekompozicije matrice A.
(a)(1 poen) Dokazati da je $Q_2^TQ_1$ ortogonalna matrica.
(b)(2 poena) Dokazati da je $Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$.
(c)(2 poena) Neka je $B = Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$. Kakvog oblika je matrica B (struktura matrice i vrednosti)?
(d)(2 poena) Ako je A matrica reda $n = 5$, koliko različitih QR dekompozicija ($Q, R \in \mathbb{R}^{5\times5}$) matrice A postoji ?

2. (4 poena) Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A i $x_1, ..., x_n$ njima odgovarajući sopstveni vektori. Neka važi $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$ i $v_0 = \alpha_3x_3 + \sum\limits_{i=5}^{n} \alpha_ix_i,\ \alpha_3, \alpha_5, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ispitati konvergenciju metode proizvoljnog vektora počevši od vektora v_0.

3. (4 poena) Koristeći Geršgorinovu teoremu dokazati da ako je matrica strogo dijagonalno-dominantna onda je ona i invertibilna. Napomena: nije potrebno dokazivati Geršgorinovu teoremu.

4. bonus pitanje (3 poena) Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Odrediti matricu $B = A^{103} - 4A^{102} + A^{101} + 6A^{100}$.

Rešenje:

1.(a) $(Q_2^T Q_1)^T * (Q_2^T Q_1) = Q_1^T Q_2 Q_2^T Q_1 = Q_1^{-1} Q_2^{-1} Q_2 Q_1 = I$

1.(b) $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ pomnožimo sa leve strane sa Q_2^{-1} a sa desne sa R_1^{-1}.
$Q_2^{-1} Q_1 R_1 R_1^{-1} = Q_2^{-1} Q_2 R_2 R_1^{-1}$
tj. $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$
a kako je Q_2 ortogonalna onda $A_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}$.

1.(c) $B = Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}$ Pošto je $B = Q_2^T Q_1$ i proizvod unitarnih matrica je unitarna matrica, onda je i B unitarna matrica.
Pošto je $B = R_2 R_1^{-1}$ i inverz gornjetrougaone je gornje trougaona, kao i proizvod gornje trougaonih je gornje trougaona, onda je i B gornje trougaona.

Dakle, B je unitarna $B^T = B^{-1}$ i gornje trougaona. Kako je B^T donje trougaona, onda jedina mogućnost je da su oba uslova ispunjena je da je B dijagonalna.

Dodatno, posto je A realna, Q i R su realne, pa je i B realna. Dijagonalna matrica koja zadovoljava gornje uslove je oblika $B = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$.

1.(d) Postoji beskonačno mnogo različitih QR dekompozicija matrice A oblika $A = QS^*SR$ gde je S kompleksna matrica rotacije. Medjutim, kako je A realna, onda $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ i samim tim i $\tilde{Q} = QS^*$ i $\tilde{R} = SR$ realne, onda i S mora biti realna pa je oblika $S = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$.
Posto je S reda 5, onda imamo ukupno 2^5 različitih matrica S, pa samim tim i 2^5 različitih QR dekompozicija.

2. Konvergira ka λ_3.

3. A je invertibilna ako je $\det(A) \neq 0$, a $\det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$. Dovoljno je pokazati da su sve sopstvene vrednosti matrice različite od 0. Lokalizujmo ih Geršgorinovom teoremom. Posto je matrica strogo dijagonalno domimantna onda $|a_{ii}| > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$. To znači da je poluprečnik svakog GG krupa manji od udaljenosti njegovog centra od koordinatnog početka, pa $0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} GG_i$.

4. $B = A^{103} - 4A^{102} + A^{101} + 6A^{100} = -A^{100}(-A^3 + 4A^2 - A + 6I)$. Karakteristični polinom matrice A je $p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$. Matrica anulira svoj karakteristični polinom, pa je $B = -A^{100} * p(A) = -A^{100} * 0 = [0]$.