NA1 A - Test 2, 11.01.2019.

1. Neka su sa $A = LR$ i $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ date LR i QR dekompozicije invertibilne, realne matrice A.
(a)(1 poen) Opisati strukturu matrica $L, R, \tilde{Q}$ i $\tilde{R}$.
(b)(2 poena) Da li su ove dekompozicije jedinstvene (obrazložiti odgovor)?
(c)(1 poen) Dokazati da je matrica $B = RL$ slična matrici A.
(d)(2 poena) Ako bi se dogodilo da je $L = \tilde{Q}$, obrazložiti zašto bi A bila gornje-trougaona?
(e)(2 poena) Koristeći činjenicu da je $A = LR$, odrediti LR dekompoziciju matrice A^T.

2.(a)(2 poena) Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ grafički lokalizovati (na što manju oblast) njene sopstvene vrednosti koristeči Geršgorinovu teoremu.
(b)(2 poena) Objasniti zašto su bar dve sopstvene vrednosti matrice A realne. Koristiti isključivo podatke dobijene na osnovu lokalizacije sopstvenih vrednosti, bez njihovog direktnog računanja.

3. (3 poena) Objasniti kako se metodom Le Verrier određuje karakteristični polinom matrice.

NA1 A - Test 2, 11.01.2019.

1. Neka su sa $A = LR$ i $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ date LR i QR dekompozicije invertibilne, realne matrice A.
(a)(1 poen) Opisati strukturu matrica $L, R, \tilde{Q}$ i $\tilde{R}$.
(b)(2 poena) Da li su ove dekompozicije jedinstvene (obrazložiti odgovor)?
(c)(1 poen) Dokazati da je matrica $B = RL$ slična matrici A.
(d)(2 poena) Ako bi se dogodilo da je $L = \tilde{Q}$, obrazložiti zašto bi A bila gornje-trougaona?
(e)(2 poena) Koristeći činjenicu da je $A = LR$, odrediti LR dekompoziciju matrice A^T.

2.(a)(2 poena) Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ grafički lokalizovati (na što manju oblast) njene sopstvene vrednosti koristeči Geršgorinovu teoremu.
(b)(2 poena) Objasniti zašto su bar dve sopstvene vrednosti matrice A realne. Koristiti isključivo podatke dobijene na osnovu lokalizacije sopstvenih vrednosti, bez njihovog direktnog računanja.

3. (3 poena) Objasniti kako se metodom Le Verrier određuje karakteristični polinom matrice.

Rešenja:

1 (a)

L je donje- trougaona sa jedinicama na dijagonali.
U je gornje-trougaona matrica.
$\tilde{Q}$ - unitarna matrica $\tilde{Q}^* = \tilde{Q}^{-1}$, ortogonalna $\tilde{Q}^T = \tilde{Q}^{-1}$ ako je A realna.
$\tilde{R}$ - gornje-trougaona matrica.

(b)

Pošto L ima jedinice na dijagonali i A je invertibilna, $A = LR$ je jedinstvena dekompozicija. $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ nije jednoznačno određena. Za $S = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\phi_n} \end{pmatrix}$ matrica $\tilde{Q}S$ je unitarna, jer je S unitarna, a matrica $S^*\tilde{R}$ je gornjetrougaona, pa je sa $A = \tilde{Q}SS^*\tilde{R}$ definisano beskonačno mnogo oblika QR dekompozicije matrice A (za različito ϕ.

(c) $A = LR$ pomnožimo sa leve strane sa L^{-1}, a sa desne sa L, dobija se $L^{-1}AL = L^{-1}LRL = RL = B$.

(d) Pošto je L donje-trougaona matrica sa jedinicama na dijagonali, A je realna i $L = \tilde{Q}$, onda i L mora biti normalna tj. $L^T = L^{-1}$. Inverz donjetrougaone matrice je donjetrougaona matrica, $\det(L) = 1$, pa matrica $L = \tilde{Q}$ mora biti jedinična matrica I. Pošto je $A = \tilde{Q}\tilde{R} = I\tilde{R} = \tilde{R}$ onda je A gornje-trougaona.

(e) $A^T = (LR)^T = R^T L^T$, međutim R^T jeste donje-trougaona ali nema jedinice na dijagonali. Ako je matrica $D = diag(R^T)$, onda je $R^T D^{-1}$ donje-trougaona sa jedinicama na dijagonali, a $A^T = (R^T D^{-1})(DL^T)$, gde DL^T jeste gornjetrougaona matrica.

2 (a)

Nakon crtanja GG krugova za matrice A i A^T dolazi se do preseka tako da sve sopstvene vrednosti pripadaju oblasti $K_1 \cup K_2$, gde $K_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 4\}, K_2 = \{z \in \mathbb{C} | |z - 12| \leq 4\}$.

(b)

Na osnovu teoreme, ako je unija k GG krugova razdvojena od unije preostalih n-k krugova, onda prva unija sadrzi tačno k, a druga n-k sopstvenih vrednosti. Krug K_1 je dobijen kao unija 3 gruga, te na osnovu toga u njemu se nalaze 3 sopstvene vrednosti, a u oblasti K_2 tačno jedna. Kako kompleksne sopstveene vrednosti uvek idu u paru $\alpha \pm i\beta$ onda je sopstvena vrednost u K_2 realna, a u K_1 se može naći samo jedan par kompleksnih sopstvenih vrednosti, dok treća mora biti takođe realna.

3. ....