NA1 A - Test 1, 28.11.2019.

1.(a)(2 poena) Neka je P realna matrica reda n oblika $P = I - \alpha ww^T$, gde je w jedinični vektor. Odrediti α tako da P bude ortogonalna matrica.
(b)(4 poena) Za zadati vektor $y \in \mathbb{R}^n$ odrediti w i k takve da $Py = (k, 0, ..., 0)^T$, gde je P ortogonalna matrica oblika $P = I - \alpha ww^T$.

2. Neka je A simetrična, pozitivno definitna matrica takva da je $m = \min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i(A)$ i $M = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i(A)$ i neka su $x^{(j)}$ i $r^{(j)} = b - Ax^{(j)}$ aproksimativno rešenje sistema $Ax = b$ dobijeno u j-toj iteraciji iterativne metode i odgovarajući rezidual, respektivno.
(a) (2 poena) Diskutovati konvergenciju iterativne metode zadate sa $x^{(j+1)} = x^{(j)} + r^{(j)}$ u zavisnosti od m i/ili M?
(b) (2 poena) Neka je $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \gamma r^{(j)}$. Odrediti vrednosti za parametar γ (u zavisnosti od m i/ili M) za koje će ovako definisana iterativna metoda uvek konvergirati ka rešenju sistema $Ax = b$.
(c)(2 poena) Ako je γ^* optimalna vrednost parametra γ za koje metoda pod (b) najbrže konvertiga i ako je $m = M$, šta se može reći o broju iteracija metode? Napomena: nije potrebno izvoditi formulu na osnovu koje će se dati odgovor.

3. (3 poena) Neka je $Ax = b$ sistem linearnih jednačina gde je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična i pozitivno definitna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$. Neka je sa $x_{k+1} = x_k - \lambda_k d_k$ definisana metoda konjugovanih pravaca i neka je $r_i = Ax_i - b$ rezidual. Dokazati da je $r_i^T d_i = r_i^T r_i$ za $i \le n$.

NA1 A - Test 1, 28.11.2019.

1.(a)(2 poena) Neka je P realna matrica reda n oblika $P = I - \alpha ww^T$, gde je w jedinični vektor. Odrediti α tako da P bude ortogonalna matrica.
(b)(4 poena) Za zadati vektor $y \in \mathbb{R}^n$ odrediti w i k takve da $Py = (k, 0, ..., 0)^T$, gde je P ortogonalna matrica oblika $P = I - \alpha ww^T$.

2. Neka je A simetrična, pozitivno definitna matrica takva da je $m = \min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i(A)$ i $M = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i(A)$ i neka su $x^{(j)}$ i $r^{(j)} = b - Ax^{(j)}$ aproksimativno rešenje sistema $Ax = b$ dobijeno u j-toj iteraciji iterativne metode i odgovarajući rezidual, respektivno.
(a) (2 poena) Diskutovati konvergenciju iterativne metode zadate sa $x^{(j+1)} = x^{(j)} + r^{(j)}$ u zavisnosti od m i/ili M?
(b) (2 poena) Neka je $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \gamma r^{(j)}$. Odrediti vrednosti za parametar γ (u zavisnosti od m i/ili M) za koje će ovako definisana iterativna metoda uvek konvergirati ka rešenju sistema $Ax = b$.
(c)(2 poena) Ako je γ^* optimalna vrednost parametra γ za koje metoda pod (b) najbrže konvertiga i ako je $m = M$, šta se može reći o broju iteracija metode? Napomena: nije potrebno izvoditi formulu na osnovu koje će se dati odgovor.

3. (3 poena) Neka je $Ax = b$ sistem linearnih jednačina gde je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična i pozitivno definitna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$. Neka je sa $x_{k+1} = x_k - \lambda_k d_k$ definisana metoda konjugovanih pravaca i neka je $r_i = Ax_i - b$ rezidual. Dokazati da je $r_i^T d_i = r_i^T r_i$ za $i \le n$.

Rešenje:

1.(a) Matrica je ortogonalna ako je $P^T = P^{-1}$, tj. ako je $P^T P = I$.

$P^T P = (I - \alpha ww^T)^T (I - \alpha ww^T) = (I - \alpha ww^T)(I - \alpha ww^T) = I - \alpha ww^T - \alpha ww^T + \alpha^2 ww^T ww^T = I - 2\alpha ww^T + \alpha^2 ww^T$

Ovaj izraz mora biti jednako I pa $-2\alpha ww^T + \alpha^2 ww^T = 0$ tj. $\alpha ww^T(\alpha - 2) = 0$ što je ispunjeno za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 2$.

1.(b) Izvodjenje HH kao sa casa: $w = \frac{y - ke_1}{||y - ke_1||_2}$ i $k = -\sigma e^{i\alpha}, \sigma = ||y||_2$.

2.(a) Iz postavke zadatka imamo: $x^{(j+1)} = x^{(j)} + r^{(j)}$ i $r^{(j)} = b - Ax^{(j)}$ tj. $x^{(j+1)} = x^{(j)} - (Ax^{(j)} - b)$

Znamo da iterativna metoda zadata sa $x^{(j+1)} = Bx^{(j)} + c$ konvergira ako su sve sopstvene vrednosti matrice B po modulu manje od 1. Zelimo da gornju iterativnu formuulu zapišemo u ovom obliku: $x^{(j+1)} = x^{(j)} - (Ax^{(j)} - b) = (I - A)x^{(j)} + b$ tj. treba ispitati sopstvene vrednosti matrice $I - A$.

Ako je λ proizvoljna sopstvena vrednost matrice A onda $Ax = \lambda x$. Odredimo sopstvene vrednosti od $I - A$:

$(I - A)x = Ix - Ax = x - \lambda x = (1 - \lambda)x$ pa je $1 - \lambda$ sopstvena vrednost od $I - A$ (izvođeno na času isto samo za matricu $(I - \tau A)$ - ovo je slučaj $\tau = 1$).

Da bi metoda konvertirala mora da važi $|1 - \lambda(A)| < 1$ tj. $0 < \lambda(A) < 2$ odnosno $0 < m \leq M < 2$

2.(b) Analogno kao pod (a) imamo : $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \gamma r^{(j)}$ i $r^{(j)} = b - Ax^{(j)}$ tj. $x^{(j+1)} = x^{(j)} - \gamma(Ax^{(j)} - b) = (I - \gamma A)x^{(j)} + \gamma b$. Ako je λ proizvoljna sopstvena vrednost matrice A, na isti način (izvođeno na času) dobijamo da je sopstvena vrednost matrice $I - \gamma A$ jednaka $1 - \gamma\lambda$. Da bi metoda konvergirala mora biti $|1 - \gamma\lambda| < 1$ tj $0 < \gamma < \frac{2}{\lambda}$. Kako ovo mora da važi za proizvolju sopstvenu vrednost, gornja granica za γ se dobija ako se za λ uzme bašM tj. $0 < \gamma < \frac{2}{M}$.

2.(c) Ako je γ^*optimalna vrednost za konvergenciju metode i ako se u iterativnoj formuli uzme $\gamma = \gamma^*$, onda je ocena brzine konvergencije data sa: $||x^{(k)} - x^*||_2 \leq (\frac{M-m}{M+m})^k \cdot ||x^{(0)} - x^*||_2$. Kako je $m = M$ u prvoj iteraciji imamo: $k = 1$, tj. $||x^{(1)} - x^*||_2 \leq 0^1 \cdot ||x^{(0)} - x^*||_2 = 0$. Norma (sa leve strane) ne moze biti manja od nule, a jednaka je nuli akko je argument jednak nuli tj. $x^{(1)} = x^*$. Dakle, u prvoj iteraciji se dolazi do rešenja.

3. Kod metode konjugovanih pravaca, pravac d_k se bira tako da bude konjugovan u odnosu na matricu A na sve prethodne $d_i, i = 0, ..., k - 1$, tj. da $(d_k, Ad_i) = 0$.

Pravac (za narednu iteraciju) se računa preko $d_i = r_i + \mu_{i-1} d_{i-1}$. Pomnožimo ovu jednačinu skalarno sa r_i:

$(d_i, r_i) = (r_i, r_i) + \mu_{i-1}(d_{i-1}, r_i)$.

Na času se dokazano da je $(d_{i-1}, r_i) = 0$ pa ostaje $(d_i, r_i) = (r_i, r_i)$.

Dokaz sa časa da je $(d_{i-1}, r_i) = 0$:

$x_i = x_{i-1} - \lambda_{i-1} d_{i-1}$, pa množenjem sa A sa leve strane i oduzimanjem b levo i desno dobija se:

$Ax_i - b = Ax_{i-1} - b - \lambda_{i-1} Ad_{i-1}$ tj. $r_i = r_{i-1} - \lambda_{i-1} Ad_{i-1}$. Množenjem skalarno sa d_{i-1} dobija se:

$(r_i, d_{i-1}) = (r_{i-1}, d_{i-1}) - \lambda_{i-1}(Ad_{i-1}, d_{i-1}) = (r_{i-1}, d_{i-1}) - \frac{(r_{i-1}, d_{i-1})}{(d_{i-1}, Ad_{i-1})} = 0$