

1.(a)(1 poen) Dokazati da za spektralni radijus matrice važi $\rho(A) \leq \|A\|$, gde je sa $\|A\|$ označena proizvoljna norma matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b)(2 poena) Ako je matrica A Hermiteova, dokazati da je $\rho(A) = \|A\|_2$.

(c)(2 poena) Ako je matrica A unitarna dokazati da je $\text{cond}_2(A) = 1$.

2. Neka je za rešavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ definisan iterativni algoritam:

$$\mathbf{x}^{(0)} \text{ proizvoljno}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B(w)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}(w) \quad (*)$$

gde je

$$B(w) = \begin{pmatrix} 2w^2 + 2w + 1 & -2w^2 + 2w + 1 \\ -2w^2 + 2w + 1 & 2w^2 + 2w + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - w \\ \frac{1}{2} - w \end{pmatrix}.$$

(a)(3 poena) Odrediti za koje vrednosti parametra w konvergira iterativni algoritam (*).

(b)(2 poena) Odrediti optimalnu vrednost parametra w koja daje najbržu konvergenciju iterativne metode.

3.(5 poena) Neka je $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ iterativni niz konstruisan metodom konjugovanih pravaca pri minimizaciji kvadratne funkcije $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - b^T \mathbf{x}$ za zadati skup Q -konjugovanih pravaca d_0, d_1, \dots, d_{n-1} i proizvoljni izbor početne tačke $\mathbf{x}^{(0)}$ i neka je f_{k+1} gradijent funkcije f u tački $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Dokazati da za svako $k, 0 \leq k \leq n-1$ važi $f_{k+1}^T d_i = 0, 0 \leq i \leq k$.

1.(a)(1 poen) Dokazati da za spektralni radijus matrice važi $\rho(A) \leq \|A\|$, gde je sa $\|A\|$ označena proizvoljna norma matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b)(2 poena) Ako je matrica A Hermiteova, dokazati da je $\rho(A) = \|A\|_2$.

(c)(2 poena) Ako je matrica A unitarna dokazati da je $\text{cond}_2(A) = 1$.

2. Neka je za rešavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ definisan iterativni algoritam:

$$\mathbf{x}^{(0)} \text{ proizvoljno}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B(w)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}(w) \quad (*)$$

gde je

$$B(w) = \begin{pmatrix} 2w^2 + 2w + 1 & -2w^2 + 2w + 1 \\ -2w^2 + 2w + 1 & 2w^2 + 2w + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - w \\ \frac{1}{2} - w \end{pmatrix}.$$

(a)(3 poena) Odrediti za koje vrednosti parametra w konvergira iterativni algoritam (*).

(b)(2 poena) Odrediti optimalnu vrednost parametra w koja daje najbržu konvergenciju iterativne metode.

3.(5 poena) Neka je $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ iterativni niz konstruisan metodom konjugovanih pravaca pri minimizaciji kvadratne funkcije $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - b^T \mathbf{x}$ za zadati skup Q -konjugovanih pravaca d_0, d_1, \dots, d_{n-1} i proizvoljni izbor početne tačke $\mathbf{x}^{(0)}$ i neka je f_{k+1} gradijent funkcije f u tački $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Dokazati da za svako $k, 0 \leq k \leq n-1$ važi $f_{k+1}^T d_i = 0, 0 \leq i \leq k$.