NA1 B - Septembar 2 2017.

1. Neka su za funkciju f dati sledeći podaci: $f(1) = -1, f(2) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$ i $f''(0) = 2$.
(a) (3 poena) Ako je poznato da je vrednost podeljene razike $f[0,1,1,2] = -0.5$, odrediti tačnu vrednost $f(0)$.
(b) (4 poena) Formirati Hermiteov interpolacioni polinom $H_5(x)$ za funkciju f i na osnovu njega odrediti približnu vrednost funkcije za $x = 0.5$.

2. (7 poena) Data je funkcija $f(x) = \arccos(x), x \in [-1,1]$. Odrediti najmanji prirodan broj m i polinom $p_m(x)$ stepena m najbolje srednjekvadratne aproksimacije za funkciju $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$ tako da je

$$||f - p_m|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p_m(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx} \leq 0.1.$$

3. (6 poena) Dat je sistem nelinearnih jednačina:

$$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0$$

$$3x - \cos(y) - 0.9 = 0$$

Metodom itracije odrediti sa tačnošću 10^{-2} njegovo rešenje u oblasti $D = \{(x,y)|\ 0.1 \leq x \leq 0.3, -2.1 \leq y \leq -1.9\}$.

NA1 B - Septembar 2 2017.

1. Neka su za funkciju f dati sledeći podaci: $f(1) = -1, f(2) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$ i $f''(0) = 2$.
(a) (3 poena) Ako je poznato da je vrednost podeljene razike $f[0,1,1,2] = -0.5$, odrediti tačnu vrednost $f(0)$.
(b) (4 poena) Formirati Hermiteov interpolacioni polinom $H_5(x)$ za funkciju f i na osnovu njega odrediti približnu vrednost funkcije za $x = 0.5$.

2. (7 poena) Data je funkcija $f(x) = \arccos(x), x \in [-1,1]$. Odrediti najmanji prirodan broj m i polinom $p_m(x)$ stepena m najbolje srednjekvadratne aproksimacije za funkciju $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$ tako da je

$$||f - p_m|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p_m(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx} \leq 0.1.$$

3. (6 poena) Dat je sistem nelinearnih jednačina:

$$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0$$

$$3x - \cos(y) - 0.9 = 0$$

Metodom itracije odrediti sa tačnošću 10^{-2} njegovo rešenje u oblasti $D = \{(x,y)|\ 0.1 \leq x \leq 0.3, -2.1 \leq y \leq -1.9\}$.

1.(a)

x	$f(x)$	$f[1]$	$f[2]$	$f[3]$	$f[4]$	$f[5]$
0	1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	-3	7	$-\frac{37}{8}$
0	1	$\underline{0}$	-2	4	$-\frac{9}{4}$	$*$
0	**1**	**-2**	**2**	$\underline{-0.5}$	$*$	$*$
1	$\underline{-1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$*$	$*$	$*$
1	$\underline{-1}$	$\underline{1}$	$*$	$*$	$*$	$*$
2	$\underline{0}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Na osnovu podataka koji su nam dati (podvucene vrednosti u tablici):
$f(1) = -1, f(2) = 0$
$f[0,0] = \frac{f'(0)}{1} = 0, f[1,1] = \frac{f'(1)}{1} = 0, f[1,2] = 1$
$f[0,0,0] = \frac{f''(0)}{2} = 1, f[1,1,2] = 1$

Boldovane vrednosti: Kako je poznato da je $f[0,1,1,2] = -0.5 = \frac{f[1,1,2]-f[0,1,1]}{2-0}$ mozemo odatle odrediti koliko je $f[0,1,1] = 2$. Slicno, na osnovu sračunate vrednosti za $f[0,1,1] = 2 = \frac{f[1,1]-f[0,1]}{1-0}$ možemo odrediti $f[0,1] = -2$. Konačno, na osnovu $f[0,1] = -2 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ dobijamo $f(0) = 1$.

1.(b) Sada mozemo popuniti celu tablicu podeljenih razlika. Traženi Hermiteov interpolacioni polinom je
$H_5(x) = 1 + x^2 - 3x^3 + 7x^3(x-1) - \frac{37}{8}x^3(x-1)^2$.
Konačno, $H_5(0.5) = 0.2930$.

2.

Zbirka str.107, zad 4.13

3.

Dat sistem transformišemo u sistem oblika:

$$x = \frac{1}{3}(\cos(y) + 0.9) \equiv g_0$$

$$y = \sin(x - 0.6) - 1.6 \equiv q_1$$

U oblasti $D =$ važi:

$$|\frac{\partial g_0}{\partial x}| = 0 \qquad |\frac{\partial g_0}{\partial y}| = |-\frac{1}{3}\sin(y)| \leq 0.3154$$

$$|\frac{\partial g_1}{\partial x}| = |\cos(x - 0.6)| \leq 0.9553 \qquad |\frac{\partial g_1}{\partial y}| = 0$$

pa je $q = 0.9553 < 1$. Zadata tačnost je postignuta kada:

$$\max(|x_n - x_{n-1}|, |y_n - y_{n-1}|) \leq \frac{1-q}{q}10^{-2} \leq 0.00047$$

$x_0 = 0.2, y_0 = -2$
$x_1 = 0.1613, y_1 = -2.0248$
$x_2 = 0.1538, y_2 = -2.0315$
$x_3 = 0.1518, y_3 = -2.0333$
$x_4 = 0.1513, y_4 = -2.0338$
$x_5 = 0.1511, y_5 = -2.0340$