Numerička analiza 1b - Septembar 2016.

1. (7 poena) Izračunati $f(3)$ pomoću prirodnog kubnog interpolacionog splajna funkcije date tabelom

x	0	2	4	5
f(x)	10	15	12	14

2.(6 poena) Koristeći Parsevalovu jednakost za Fourier-ov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

3.(a)(5 poena) Metodom iteracije za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti sa tačnošću $\frac{1}{2}10^{-3}$ rešenje sistema nelinearnih jednačina u oblasti $D = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$:

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$

$$f_2(x,y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0.$$

(b)(2 poena) Na osnovu apriorne ocene greske proceniti broj iteracija koje je potrebno uraditi da bi se postigla tačnost 10^{-7}.

Numerička analiza 1b - Septembar 2016.

1. (7 poena) Izračunati $f(3)$ pomoću prirodnog kubnog interpolacionog splajna funkcije date tabelom

x	0	2	4	5
f(x)	10	15	12	14

2.(6 poena) Koristeći Parsevalovu jednakost za Fourier-ov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

3.(a)(5 poena) Metodom iteracije za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti sa tačnošću $\frac{1}{2}10^{-3}$ rešenje sistema nelinearnih jednačina u oblasti $D = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$:

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$

$$f_2(x,y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0.$$

(b)(2 poena) Na osnovu apriorne ocene greske proceniti broj iteracija koje je potrebno uraditi da bi se postigla tačnost 10^{-7}.

Numerička analiza 1b - Septembar 2016.

1. (7 poena) Izračunati $f(3)$ pomoću prirodnog kubnog interpolacionog splajna funkcije date tabelom

x	0	2	4	5
f(x)	10	15	12	14

2.(6 poena) Koristeći Parsevalovu jednakost za Fourier-ov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

3.(a)(5 poena) Metodom iteracije za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti sa tačnošću $\frac{1}{2}10^{-3}$ rešenje sistema nelinearnih jednačina u oblasti $D = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$:

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$

$$f_2(x,y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0.$$

(b)(2 poena) Na osnovu apriorne ocene greske proceniti broj iteracija koje je potrebno uraditi da bi se postigla tačnost 10^{-7}.

REŠENJA:

1.

$h_1 = h_2 = 2, h_3 = 1$

Formiramo sistem jednačina $\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \nu_i M_{i+1} = \lambda_i$

$\mu_1 = \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{h_2}{h_2+h_3} = \frac{2}{3}$

$\nu_1 = 1 - \mu_1 = \frac{1}{2}, \nu_2 = 1 - \mu_2 = \frac{1}{3}$

$\lambda_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -6, \lambda_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = 7$

$$\mu_1 M_0 + 2M_1 + \nu_1 M_2 = \lambda_1$$

$$\mu_2 M_1 + 2M_2 + \nu_2 M_3 = \lambda_1$$

Kako je splaj prirodni, $M_0 = M_3 = 0$ pa sistem postaje:

$$2M_1 + \frac{1}{2}M_2 = -6$$

$$\frac{2}{3}M_1 + 2M_2 = 7$$

Rešavanjem dobijamo vrednosti $M_1 = -4.2273, M_2 = 4.9091$.

Formiramo splajn na [2,4]:

$\alpha_1 = f_1 = 15$

$\beta_1 = \frac{f_2-f_1}{h_2} - \frac{h_2}{6}(2M_1 + M_2) = -0.3182$

$\gamma_1 = \frac{1}{2}M_1 = -2.1136$

$\delta_1 = \frac{1}{6h_1}(M_2 - M1) = 0.7614$

$S(f;x) = 15 - 0.3182(x-2) - 2.1136(x-2)^2 + 0.7614(x-2)^3, x \in [2,4]$

$S(3) = 13.3296$

2. Funkcija $f(x) = x^2$ je parna pa je $b_n = 0$. Računamo koeficijente a_n za $n \in [0, \infty)$:

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3|_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos(nx)dx & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{array} \right\}$

$= \frac{2}{\pi}(\frac{x^2\sin(nx)}{n}|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)dx)$

$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx$

$= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \sin(nx)dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array} \right\}$

$= -\frac{4}{n\pi}(\frac{x\cos(nx)}{n}|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)dx)$

$= \frac{4}{n^2\pi}x\cos(nx)|_0^\pi$

$= 4\frac{(-1)^n}{n^2}$

Koeficijente uvrstimo u formulu za razvoj u Fourierov red:

$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

3.

$x = \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + 3)$, $y = \frac{1}{6}(x^3 - y^3 + 2)$. $J = \begin{pmatrix} x^2/2 & y^2/2 \\ x^2/2 & -y^2/2 \end{pmatrix}$

$q = 17/36$. x