Numerička analiza 1b - Oktobar 2015.

1.(6 poena) Funkcija dve promenljive $f(x,y)$ je zadata sledećom tabelom:

	$x_0 = 0.4$	$x_1 = 0.6$	$x_2 = 0.8$
$y_0 = 0.1$	-0.3216	-0.3455	-0.3704
$y_1 = 0.2$	-0.3095	-0.3350	-0.3598
$y_2 = 0.3$	-0.2886	-0.3101	-0.3203

Pomoću formule za interpolaciju funkcija dve promenljive, odrediti vrednost funkcije u tački $(0.4675, 0.1486)$. Računati na 4 decimale.

2. (a)(3 poena) Ispitati da li je moguće aproksimirati funkciju $f(x) = (5-x)^{-1}$ polinomom $p(x)$ nultog stepena tako da vazi

$$||f-p|| = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

(b)(4 poena) U slučaju potvrdnog odgovora pod (a) naći jedan polinom koji ispunjava zadati uslov. U slučaju negativnog odgovora pod (a), odrediti najniži stepen polinoma za koji će važiti zadati uslov i bar jedan polinom koji ga ispunjava.

3. (7 poena) Njutnovom metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti ekstremum funkcije

$$f(x,y) = 3x^3 + 2y^2 + xy^2 - 10x - 5y - 1$$

u okolini tačke (1,1) sa tačnošću 10^{-4}.

Numerička analiza 1b - Oktobar 2015.

1.(6 poena) Funkcija dve promenljive $f(x,y)$ je zadata sledećom tabelom:

	$x_0 = 0.4$	$x_1 = 0.6$	$x_2 = 0.8$
$y_0 = 0.1$	-0.3216	-0.3455	-0.3704
$y_1 = 0.2$	-0.3095	-0.3350	-0.3598
$y_2 = 0.3$	-0.2886	-0.3101	-0.3203

Pomoću formule za interpolaciju funkcija dve promenljive, odrediti vrednost funkcije u tački $(0.4675, 0.1486)$. Računati na 4 decimale.

2. (a)(3 poena) Ispitati da li je moguće aproksimirati funkciju $f(x) = (5-x)^{-1}$ polinomom $p(x)$ nultog stepena tako da vazi

$$||f-p|| = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

(b)(4 poena) U slučaju potvrdnog odgovora pod (a) naći jedan polinom koji ispunjava zadati uslov. U slučaju negativnog odgovora pod (a), odrediti najniži stepen polinoma za koji će važiti zadati uslov i bar jedan polinom koji ga ispunjava.

3. (7 poena) Njutnovom metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti ekstremum funkcije

$$f(x,y) = 3x^3 + 2y^2 + xy^2 - 10x - 5y - 1$$

u okolini tačke (1,1) sa tačnošću 10^{-4}.

REŠENJA:
1.

2. Zbirka, str 151, zad 4.55

3. Potrebno je rešiti sistem jednačina:

$$\frac{\partial f}{\delta x} = 0, \frac{\partial f}{\delta y} = 0$$

tj sistem:
$\frac{\partial f}{\delta x} = 9x^2 + y^2 - 10 = 0 \equiv f_1,$
$\frac{\partial f}{\delta y} = 4y + 2xy - 5 = 0 \equiv f_2$
Njutnova metoda je definisana iteartivnim algoritmom:
$X^{(n+1)} = X^{(n)} - [f'(X^{(n)})] \cdot f(X^{(n)})$
gde je:

$$f'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 4+2x \end{bmatrix}$$

1. iteracija: $x_0 = 1, y_0 = 1$:

$$f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, [f'(x_0, y_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05769 & -0.01923 \\ -0.01923 & 0.17308 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = 1.01923, y_1 = 0.82692$$

$||X^{(1)} - X^{(0)}|| = 0.17414 > \epsilon$
2. iteracija: $x_1 = 1.01923, y_1 = 0.82692$:

$$f(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 0.03328 \\ -0.00666 \end{bmatrix}, f'(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 18.34615 & 1.65385 \\ 1.65385 & 6.03846 \end{bmatrix}, [f'(x_1, y_1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05589 & -0.01531 \\ -0.01531 & 0.16980 \end{bmatrix},$$

$$x_2 = 1.01727, y_2 = 0.82856$$

$||X^{(2)} - X^{(1)}|| = 0.00256 > \epsilon$
3. iteracija: $x_2 = 1.01727, y_2 = 0.82856$:

$$f(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 0.00004 \\ -0.00001 \end{bmatrix}, f'(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 18.31084 & 1.65713 \\ 1.65713 & 6.03454 \end{bmatrix}, [f'(x_2, y_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05600 & -0.01538 \\ -0.01538 & 0.16994 \end{bmatrix},$$

$$x_3 = 1.01727, y_3 = 0.82856$$

$||X^{(3)} - X^{(2)}|| = 2.75 \cdot 10^{-6} < \epsilon$