NA1 B - Jun1 2017.

1. (6 poena) Odrediti parametre a, b, c, d i e tako da

$$S(f;x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2, & x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

predstavlja kubni splajn koji interpolira funkciju zadatu sledećom tabelom

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

.

2. (7 poena) Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju oblika $\varphi(x) = \ln(a + e^{b+x})$ funkcije $f(x)$ zadate tabelom. Računati na 3 decimale.

x	2.6	2.8	3.0	3.5
$f(x)$	ln(2.22)	ln(2.44)	ln(2.67)	ln(3.21)

3. (7 poena) Metodom Bairstow-a naći korene polinoma $P_4(x) = 0.5x^4 - 4.5x^3 + 9.5x^2 - 4.5x + 9$ sa tačnošću 10^{-3}. Za početne vrednosti koeficijenata kvadratnog faktora uzeti $p = q = 0$.

NA1 B - Jun1 2017.

1. (6 poena) Odrediti parametre a, b, c, d i e tako da

$$S(f;x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2, & x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

predstavlja kubni splajn koji interpolira funkciju zadatu sledećom tabelom

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

.

2. (7 poena) Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju oblika $\varphi(x) = \ln(a + e^{b+x})$ funkcije $f(x)$ zadate tabelom. Računati na 3 decimale.

x	2.6	2.8	3.0	3.5
$f(x)$	ln(2.22)	ln(2.44)	ln(2.67)	ln(3.21)

3. (7 poena) Metodom Bairstow-a naći korene polinoma $P_4(x) = 0.5x^4 - 4.5x^3 + 9.5x^2 - 4.5x + 9$ sa tačnošću 10^{-3}. Za početne vrednosti koeficijenata kvadratnog faktora uzeti $p = q = 0$.

1.

$S_1(1) = S_2(1) : a(x-2)^2 + b(x-1)^3 = c(x-2)^2$ za $x = 1$
$S_2(3) = S_3(3) : c(x-2)^2 = d(x-2)^2 + e(x-3)^3$ za $x = 3$
$S_1'(1) = S_2'(1) : 2a(x-2) + 3b(x-1)^2 = 2c(x-2)$ za $x = 1$
$S_2'(3) = S_3'(3) : 2c(x-2) = 2d(x-2) + 3e(x-3)^2$ za $x = 3$
$S_1''(1) = S_2''(1) : 2a + 6b(x-1) = 2c$ za $x = 1$
$S_2''(3) = S_3''(3) : 2c = 2d + 6e(x-3)$ za $x = 3$.
Zamenom x-ova i rešavanjem dobija se $a = c = d$.
Pošto je to splajn za funkciju zadatu tabelom, mora da vazi:
$S(0) = 26 : a(x-2)^2 + b(x-1)^3 = 26$ za $x = 1 \rightarrow 4a + b = 26$.
$S(1) = 7 : c(x-2)^2 = 7$ za $x = 1 \rightarrow c = 7 = a = d$.
Vraćanjem $a = 7$ u prethodnu jednačinu $\rightarrow b = -2$.
$S(4) = 25 : d(x-2)^2 + e(x-1)^3 = 25$ za $x = 25 \rightarrow e = -3$

2.

Najpre svedimo na linearan sistem jednačina:
$e^{f(x)} = e^{\ln(a+e^{b+x})} = a + e^{b+x} = a + e^b e^x$.
Nakon uvođenja smene $t = e^x, p = a, q = e^b$ polazni problem se svodi na nalženje srednjekvadratne aproksimacije funkcijom $\phi(t) = p + qt$ za tablicno zadatu funkciju

$t = e^x$	$e^{2.6}$	$e^{2.8}$	$e^{3.0}$	$e^{3.5}$
$e^{f(x)}$	2.22	2.44	2.67	3.21

Dobija se preodređen sistem linearnih jednačina:
$p + qe^{2.6} = 2.22$
$p + qe^{2.8} = 2.44$
$p + qe^{3.0} = 2.67$
$p + qe^{3.5} = 3.21$

Metodom najmanjih kvadrata (množenjem leve i desne strane sa transponovanom matricom sistema) dobija se sistem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 83.109 \\ 83.109 & 1951.761 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.54 \\ 229.943 \end{pmatrix}$$

čijim rešavanjem se dobija $p = 1.624, q = 0.049$.
Konačno, $p = a = 1.624, q = e^b = 0.049 \Rightarrow b = \ln(0.049) = -3.015$, te je $\varphi(x) = \ln(1.624 + e^{-3.015+x})$.

3. $P_4(x) = 0.5x^4 - 4.5x^3 + 9.5x^2 - 4.5x + 9 = x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 9x + 18$.

p	0		-0.0249		0.0004	
q	0		0.9474		1.0004	
k	b	c	b	c	b	c
0	1	1	1	1	1	1
1	-9	-9	-8.9751	-8.9501	-9.0004	-9.0008
2	19	19	17.8289	16.6584	18.0030	17.0061
3	-9		-0.0528		-0.0031	
4	18		1.1082		-0.0098	
Δp	-0.0249		0.0253		-0.0003	
Δq	0.9474		0.0530		-0.0003	

Prema tome, dati polinom se može predstaviti kao:

$$P_4(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 9x + 18) = (x - i)(x + i)(x - 6)(x - 3)$$