Numerička analiza 1B - Januar 2016.

1. (6 poena) Neka je $S(x)$ prirodni kubni interpolacioni splajn funkcije $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ dobijen interpolacijom u čvorovima 0,1,2,3,4. Odrediti vrednost $S''(x)$ u čvorovima interpolacije.

2. Naći najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju polinomom prvog stepena $(Q(x) = c_0 + c_1 x\ )$ funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ u slučajevima kada je težinska funkcija jednaka:
(a) (3 poena) $w_1(x) = 1,$ **(b) (5 poena)** $w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$

3.(6 poena) Metodom Bairstow-a sa tačnošću $5 * 10^{-2}$ odrediti korene polinoma:

$$P_4(x) = 3x^4 - 12x^2 + 15x^2 - 18x + 21$$

Numerička analiza 1B - Januar 2016.

1. (6 poena) Neka je $S(x)$ prirodni kubni interpolacioni splajn funkcije $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ dobijen interpolacijom u čvorovima 0,1,2,3,4. Odrediti vrednost $S''(x)$ u čvorovima interpolacije.

2. Naći najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju polinomom prvog stepena $(Q(x) = c_0 + c_1 x\ )$ funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ u slučajevima kada je težinska funkcija jednaka:
(a) (3 poena) $w_1(x) = 1,$ **(b) (5 poena)** $w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$

3.(6 poena) Metodom Bairstow-a sa tačnošću $5 * 10^{-2}$ odrediti korene polinoma:

$$P_4(x) = 3x^4 - 12x^2 + 15x^2 - 18x + 21$$

Numerička analiza 1B - Januar 2016.

1. (6 poena) Neka je $S(x)$ prirodni kubni interpolacioni splajn funkcije $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ dobijen interpolacijom u čvorovima 0,1,2,3,4. Odrediti vrednost $S''(x)$ u čvorovima interpolacije.

2. Naći najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju polinomom prvog stepena $(Q(x) = c_0 + c_1 x\ )$ funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ u slučajevima kada je težinska funkcija jednaka:
(a) (3 poena) $w_1(x) = 1,$ **(b) (5 poena)** $w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$

3.(6 poena) Metodom Bairstow-a sa tačnošću $5 * 10^{-2}$ odrediti korene polinoma:

$$P_4(x) = 3x^4 - 12x^2 + 15x^2 - 18x + 21$$

REŠENJA:

1.

i	0	1	2	3	4
x	0	1	2	3	4
f(x)	1	0	-1	0	1

Splajn je prirodni pa je $M_0 = M_4 = 0$.
$h_i = 1, \qquad \mu_i = \frac{1}{2}, \qquad \nu_i = \frac{1}{2}, \qquad i = 1, 2, 3.$
$\lambda_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = \frac{6}{x_2 - x_0}(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}) = 0$
$\lambda_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = \frac{6}{x_3 - x_1}(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}) = 6$
$\lambda_3 = 6f[x_2, x_3, x_4] = \frac{6}{x_4 - x_2}(\frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} - \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}) = 0$
Sistem po momentima (drugim izvodima):
$\frac{1}{2}M_0 + 2M_1 + \frac{1}{2}M_2 = 0$
$\frac{1}{2}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 = 6$
$\frac{1}{2}M_2 + 2M_3 + \frac{1}{2}M_4 = 0$
ima rešenje: $M_0 = M_4 = 0$ (jer splajn je prirodni), $M_1 = -\frac{6}{7}, \quad M_2 = \frac{24}{7}, \quad M_3 = -\frac{6}{7}$.

2. Trebaju nam odgovarajući ortogonalni polinomi na [0,1]. Ako je $x \in [0, 1]$ a $t \in [-1, 1]$ potrebne afine transformacije su:
$t(x) = 2x - 1, \qquad x(t) = \frac{t+1}{2}$.
Zadatim težinskim funkcijama $w_1(x) = 1$ i $w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ na $[0, 1]$ odgovaraju sledeće težinske funkcije na $[-1, 1]$:
$w_1(t) = 1$ i $w_2(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}$.
Pripadni ortogonalni polinomi su Ležandrovi (deo pod (a)), odnosno Čebiševljevi polinomi (deo pod (b)).

(a) Prva dva Ležandrova polinoma na $[-1, 1]$ su $L_0(t) = 1$ i $L_1(t) = t$. Važi:
$(L_i, L_j) = 0$, za $i \neq j$, odnosno: $(L_i, L_i) = \frac{2}{2i+1}$, pa se koeficijenti c_0 i c_1 određuju direktno iz:
$c_0 = \frac{2 \cdot 0}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot L_0(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot 1dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
$c_1 = \frac{2 \cdot 1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot L_1(t)dt = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot tdt = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
Odavde, $Q(t) = c_0 + c_1 t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t$. Nakon vraćanja smene: $Q(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(2x - 1) = x - \frac{1}{6}$.

2.(b) Prva dva Čebiševljeva polinoma na $[-1, 1]$ su $T_0(t) = 1$ i $T_1(t) = t$. Važi:
$(T_0, T_0) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 1 \cdot 1dt = 2\pi,$
$(T_1, T_1) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot t \cdot tdt = \pi,$
$(T_0, T_1) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 1 \cdot tdt = 0,$
pa se koeficijenti c_0 i c_1 određuju direktno iz:
$c_0 = \frac{1}{(T_0, T_0)} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot T_0(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 1dt = \frac{3}{8}$
$c_1 = \frac{1}{(T_1, T_1)} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot T_1(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot tdt\frac{1}{2}$
Odavde, $Q(t) = c_0 + c_1 t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}t$. Nakon vraćanja smene: $Q(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}(2x - 1) = x - \frac{1}{8}$.

3.
$P_4(x) = 3 * (x^4 - 4x^2 + 5x^2 - 6x + 7)$

p	0		-0.08		0.290		0.217	
q	0		1.4		1.617		1.636	
k	b	c	b	c	b	c	b	c
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-4	-4	-3.920	-3.840	-4.290	-4.580	-4.217	-4.434
2	5	5	3.286	1.579	4.627	4.339	4.279	3.605
3	-6		-0.249		-0.405		-0.028	c
4	7		2.379		-0.365		0.004	
δp	-0.08		0.370		-0.073		-0.002	
δq	1.4		0.217		0.019		0.004	

$$P_4(x) = 3 * (x^2 + 0.215x + 1.641)(x^2 - 4.217x + 4.279)$$

$$x_0 = -0.108 + 1.277i, x_1 = -0.108 - 1.277i, x_2 = 2.517, x_3 = 1.700$$