NA1 B - Test 2, 31.5.2019.

1.(a) (2 poena) Diskretna Furijeova transformacija vektora $f \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ se može predstaviti vektorom $\hat{f} = \frac{1}{n}Ff$, $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definisati matricu F.
(b) (2 poena) Za $n = 3$ pokazati da su kolone matrice F međusobno ortogonalne.

2. Neka je $f(x) = -\cos(x), Q_1(x) = 0.5x - 1.1$.
(a) (2 poena) Teorema De la Vallée Poussin kaže da pod određenim uslovima za veličinu najbolje aproksimacije važi $E(f) \geq \min\limits_{i=0,\dots,n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$ gde je $Q_n(x)$ proizvoljni polinom stepena n. Pokazati da skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove teoreme za $f(x)$ i $Q_1(x)$ na $[0, 1.11]$. Računati na 3 decimale.
(b) (2 poena) Da li skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove Čebiševeljeve teoreme? Obrazložiti odgovor.
(c) (2 poena) Da li je polinom $Q_1(x)$ element najbolje ravnomerne aproksimacije funkcije $f(x)$ na $[0, 1.11]$? Obrazložiti odgovor.

3. (5 poena) Dokazati apriornu ocenu greške rešenja određenog Newtonovom metodom,

$$||x^* - x_n|| \leq \frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}||[f'(x_0)]^{-1}F(x_0)||.$$

NA1 B - Test 2, 31.5.2019.

1.(a) (2 poena) Diskretna Furijeova transformacija vektora $f \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ se može predstaviti vektorom $\hat{f} = \frac{1}{n}Ff$, $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definisati matricu F.
(b) (2 poena) Za $n = 3$ pokazati da su kolone matrice F međusobno ortogonalne.

2. Neka je $f(x) = -\cos(x), Q_1(x) = 0.5x - 1.1$.
(a) (2 poena) Teorema De la Vallée Poussin kaže da pod određenim uslovima za veličinu najbolje aproksimacije važi $E(f) \geq \min\limits_{i=0,\dots,n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$ gde je $Q_n(x)$ proizvoljni polinom stepena n. Pokazati da skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove teoreme za $f(x)$ i $Q_1(x)$ na $[0, 1.11]$. Računati na 3 decimale.
(b) (2 poena) Da li skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove Čebiševeljeve teoreme? Obrazložiti odgovor.
(c) (2 poena) Da li je polinom $Q_1(x)$ element najbolje ravnomerne aproksimacije funkcije $f(x)$ na $[0, 1.11]$? Obrazložiti odgovor.

3. (5 poena) Dokazati apriornu ocenu greške rešenja određenog Newtonovom metodom,

$$||x^* - x_n|| \leq \frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}||[f'(x_0)]^{-1}F(x_0)||.$$

NA1 B - Test 2, 31.5.2019.

1.(a) (2 poena) Diskretna Furijeova transformacija vektora $f \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ se može predstaviti vektorom $\hat{f} = \frac{1}{n}Ff$, $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definisati matricu F.
(b) (2 poena) Za $n = 3$ pokazati da su kolone matrice F međusobno ortogonalne.

2. Neka je $f(x) = -\cos(x), Q_1(x) = 0.5x - 1.1$.
(a) (2 poena) Teorema De la Vallée Poussin kaže da pod određenim uslovima za veličinu najbolje aproksimacije važi $E(f) \geq \min\limits_{i=0,\dots,n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$ gde je $Q_n(x)$ proizvoljni polinom stepena n. Pokazati da skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove teoreme za $f(x)$ i $Q_1(x)$ na $[0, 1.11]$. Računati na 3 decimale.
(b) (2 poena) Da li skup tačaka $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadovoljava uslove Čebiševeljeve teoreme? Obrazložiti odgovor.
(c) (2 poena) Da li je polinom $Q_1(x)$ element najbolje ravnomerne aproksimacije funkcije $f(x)$ na $[0, 1.11]$? Obrazložiti odgovor.

3. (5 poena) Dokazati apriornu ocenu greške rešenja određenog Newtonovom metodom,

$$||x^* - x_n|| \leq \frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}||[f'(x_0)]^{-1}F(x_0)||.$$

1.

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}$

Neka je x_i, i-ta kolona matrice F i $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$(x_1, x_2) = x_2^* x_1 = [1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{4\pi}{3}}] \cdot [1,1,1]^T = 1 + \cos(\frac{2\pi}{3}) - i\sin(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$(x_1, x_3) = x_3^* x_1 = [1, e^{-i\frac{4\pi}{3}}, e^{-i\frac{8\pi}{3}}] \cdot [1,1,1]^T = 1 + \cos(\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3}) + \cos(\frac{8\pi}{3}) - i\sin(\frac{8\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$(x_2, x_3) = x_3^* x_2 = [1, e^{-i\frac{4\pi}{3}}, e^{-i\frac{8\pi}{3}}] \cdot [1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}]^T = 1 + e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3})} + e^{i(\frac{4\pi}{3} - \frac{8\pi}{3})} = 1 + e^{-i(\frac{2\pi}{3})} + e^{-i(\frac{4\pi}{3})} = 1 + \cos(\frac{2\pi}{3}) - i\sin(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

2.

Uslov koji mora da bude zadovoljen je da postoje n+2 razlicitne tačke iz $[a,b]$, $x_0 < ... < x_{n+1}$ takve da $sign[(f(x_i) - Q_1(x_i))(-1)^i] = const.$

Za $x_1 = 0 : f(0) - Q_1(0) = 0.1 > 0$
Za $x_2 = \frac{1}{2} : f(\frac{1}{2}) - Q_1(\frac{1}{2}) = -0.0276 < 0$
Za $x_3 = 1 : f(1.11) - Q_1(1.11) = 0.1 > 0$

(b) Cebisevljeva teorema kaze da za tačke Cebisevljeve alternanse vazi $f(x_i) - Q_1(x_i) = \alpha(-1)^i L$. Posto za ove 3 tacke nije ista vrednost L one ne zadovoljavaju Teoremu.

(c) Posto je $f(x)$ konkavna na [0,1.11], onda su tačke Cebisevljeve alternanse $x_1 = 0, x_3 = 1.11$ i potrebno je da odedimo sredisnju x_2. Ona se dobija tako da $f'(x_2) - Q_1'(x_2) = sin(x) - 0.5 = 0 \Rightarrow x = \pi/6 - 0.5236$. L u 3 tacke nije isto, pa Q_1 nije ENRA.

3.