NA1 B - Test 1, 5.4.2018.

1. (a) (2 poena) Neka je $S^m_\Delta(f;x)$ interpolacioni splajn reda m formiran za funkciju $f(x)$ nad podelom $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Koliko dodatnih uslova je potrebno obezbediti kako bi splajn bio jedinstveno određen? Obrazložiti odgovor.

(b) (2 poena) Neka je $f(x)$ polinom trećeg stepena, a $S^3_\Delta(f;x)$ prirodni kubni splajn formiran za $f(x)$ nad podelom $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Objasniti zašto će se u opštem slučaju $S^3_\Delta(f;x)$ razlikovati od $f(x)$ na $[a,b]$. Šta je neophodno da bi $S^3_\Delta(f;x)$ bio identičan kao $f(x)$?

2. (5 poena) Neka je $Q_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^o g_i$ element najbolje aproksimacije za f u konačnodimenzionom potprostoru Hilbertovog prostora. Dokazati Beselovu nejednakost $||f||^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i^o|^2$. Pod kojim uslovima ona važi?

3. Neka je $L_2[a,b]$ prostor funkcija integrabilnih sa kvadratom na $[a,b]$.
(a)(2 poena) Da li je sistem funkcija $\{e^{2\pi i n x/(b-a)}\}$, $n \in \mathbb{Z}$ ortogonalan na $[a,b]$? Koji uslov moraju da zadovoljavaju a i b da bi ovaj sistem bio ortonormiran?
(b)(2 poena) Neka je $a = 0$, $b = 1$ i $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Odrediti koeficijente c_k tako da je $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k x}$
(c)(2 poena) Koliko je $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$?

NA1 B - Test 1, 5.4.2018.

1. (a) (2 poena) Neka je $S^m_\Delta(f;x)$ interpolacioni splajn reda m formiran za funkciju $f(x)$ nad podelom $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Koliko dodatnih uslova je potrebno obezbediti kako bi splajn bio jedinstveno određen?

(b) (2 poena) Neka je $f(x)$ polinom trećeg stepena, a $S^3_\Delta(f;x)$ prirodni kubni splajn formiran za $f(x)$ nad podelom $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Objasniti zašto će se u opštem slučaju $S^3_\Delta(f;x)$ razlikovati od $f(x)$ na $[a,b]$. Šta je neophodno da bi $S^3_\Delta(f;x)$ bio identičan kao $f(x)$?

2. (5 poena) Neka je $Q_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^o g_i$ element najbolje aproksimacije za f u konačnodimenzionom potprostoru Hilbertovog prostora. Dokazati Beselovu nejednakost $||f||^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i^o|^2$. Pod kojim uslovima ona važi?

3. Neka je $L_2[a,b]$ prostor funkcija integrabilnih sa kvadratom na $[a,b]$.
(a)(2 poena) Da li je sistem funkcija $\{e^{2\pi i n x/(b-a)}\}$, $n \in \mathbb{Z}$ ortogonalan na $[a,b]$? Koji uslov moraju da zadovoljavaju a i b da bi ovaj sistem bio ortonormiran?
(b)(2 poena) Neka je $a = 0$, $b = 1$ i $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Odrediti koeficijente c_k tako da je $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k x}$
(c)(2 poena) Koliko je $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$?

1.

2.

3.