

1. (6 poena) Metodom konjugovanih gradijenata rešiti sledeći sistem linearnih jednačina

$$2.20x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 = 0.79$$

$$0.34x_1 + 2.43x_2 + 0.25x_3 = 0.49$$

$$0.36x_1 + 0.25x_2 + 2.14x_3 = 1.03$$

2. (6 poena) Jacobi-jevom metodom odrediti sopstvene vrednosti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1.18 & 6.40 & -4.49 \\ 6.40 & -3.84 & -1.21 \\ -4.49 & -1.21 & 5.67 \end{pmatrix}$$

sa tačnošću 10^{-3} . Koristiti isključivo stabilne formule za računanje uglova rotacije.

3. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) (4 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

(b) (4 poena) Metodom proizvoljnog vektora odrediti najmanju po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

Kao početne iteracije uzimati vektor $(1, 1, 1)^T$.

1. (5 poena) Metodom konjugovanih gradijenata rešiti sledeći sistem linearnih jednačina

$$2.20x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 = 0.79$$

$$0.34x_1 + 2.43x_2 + 0.25x_3 = 0.49$$

$$0.36x_1 + 0.25x_2 + 2.14x_3 = 1.03$$

2. (5 poena) Jacobi-jevom metodom odrediti sopstvene vrednosti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1.18 & 6.40 & -4.49 \\ 6.40 & -3.84 & -1.21 \\ -4.49 & -1.21 & 5.67 \end{pmatrix}$$

sa tačnošću 10^{-3} . Koristiti isključivo stabilne formule za računanje uglova rotacije.

3. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) (5 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

(b) (5 poena) Metodom proizvoljnog vektora odrediti najmanju po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

Kao početne iteracije uzimati vektor $(1, 1, 1)^T$.

Rešenje:

1. $r = -0.7900 \ -0.4900 \ -1.0300$

$\lambda = 0.3613$

$X = 0.2854 \ 0.1770 \ 0.3721$

$r = 0.0321 \ 0.1303 \ -0.0866$

$M = -0.0132$

$p = 0.0216 \ 0.1238 \ -0.1003$

$\lambda = 0.4738$

$X = 0.2752 \ 0.1184 \ 0.4196$

$r = 0.0067 \ -0.0039 \ -0.0033$

$M = -0.0028$

$p = 0.0068 \ -0.0035 \ -0.0036$

$\lambda = 0.5408$

$X = 0.2715 \ 0.1203 \ 0.4216$

$r = 1.0e-015 \ *$

$-0.1110 \ -0.1110 \ 0$

Broj potrebnih iteracija: 3

$X = 0.2715 \ 0.1203 \ 0.4216$

2. Polovina nedijagonalne norme matrice iznosi 7.9110. $(k, l) = (0, 1), \lambda = -6.4, \mu = -2.51, \omega = 0.931, \sin\phi = 0.5634, \cos\phi = 0.8262$

$$A_1 = U^T * A * U = \begin{pmatrix} 5.5446 & 0 & -4.3912 \\ 0 & -8.2046 & 1.5301 \\ -4.3912 & 1.5301 & 5.67 \end{pmatrix}$$

Polovina nedijagonalne norme matrice A1 iznosi 4.6502, odnos nedijagonalnih normi polazne matrice i A1 je 0.5878. $(k, l) = (0, 2), \lambda = 4.3912, \mu = 0.0627, \omega = 0.9999, \sin\phi = 0.7020, \cos\phi = 0.7121$

$$A_2 = U^T * A_1 * U = \begin{pmatrix} 1.2156 & 1.0742 & 0 \\ 1.0742 & -8.2046 & 1.0896 \\ 0 & 1.0896 & 9.9990 \end{pmatrix}$$

Polovina nedijagonalne norme matrice A2 iznosi 1.5301, odnos nedijagonalnih normi polazne matrice i A2 je 0.1934. $(k, l) = (1, 2), \lambda = -1.0896, \mu = 9.1018, \omega = -0.1189, \sin\phi = -0.0595, \cos\phi = 0.9982$

$$A_3 = U^T * A_2 * U = \begin{pmatrix} 1.2156 & 1.0742 & 0.0640 \\ 1.0723 & -8.2696 & 0 \\ 0.1640 & 0 & 10.0640 \end{pmatrix}$$

Polovina nedijagonalne norme matrice A3 iznosi 1.0742, odnos nedijagonalnih normi polazne matrice i A3 je 0.1358. $(k, l) = (0, 1), \lambda = -1.0723, \mu = -4.7426, \omega = 0.2205, \sin\phi = 0.1110, \cos\phi = 0.9938$

$$A_4 = U^T * A_3 * U = \begin{pmatrix} 1.3353 & 0 & 0.0636 \\ 0 & -8.3893 & -0.0071 \\ 0.0636 & -0.0071 & 10.0640 \end{pmatrix}$$

Polovina nedijagonalne norme matrice A4 iznosi 0.0640, odnos nedijagonalnih normi polazne matrice i A4 je 0.0081, što znači da je dostignuta tražena tačnost. $\lambda_0 = 1.3353, \lambda_1 = -8.3893, \lambda_2 = 10.0640$

3.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$w_1^{(k)}$	$w_2^{(k)}$	$w_3^{(k)}$	λ
0	1	1	1	1	1	1	
1	7	7	8	7	5	10	7.4545
2	52	52	60	48	40	76	7.4641
3	388	388	448	348	308	568	7.4641

Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je 7.4641, a sopstevni vektor (0.5477, 0.5477, 0.6324).

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1250 & 1.1250 & -0.7500 \\ -0.6250 & 1.6250 & -0.7500 \\ 0.5000 & -1.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_1^{(k)}/v_1^{(k-1)}$	$v_2^{(k)}/v_2^{(k-1)}$	$v_3^{(k)}/v_3^{(k-1)}$
0	1	1	1			
1	0.2500	0.2500	0			
2	0.2500	0.2500	-0.2500			
3	0.4375	0.4375	-0.5000	1.7500	1.7500	2.0000
4	0.8125	0.8125	-0.9375	1.8571	1.8571	1.8750
5	1.5156	1.5156	-1.7500	1.8654	1.8654	1.8667
6	2.8281	2.8281	-3.2656	1.8660	1.8660	1.8661

Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice B je 1.8661, pa je najmanja od matrice A jednaka $\frac{1}{1.8661} = 0.5359$ i njoj odg. sopstveni vektor je (0.5477, 0.5477, -0.6324).