Numerička analiza 1A - MATLAB kolokvijum 28.12.2019.

Napomena: U svim zadacima se za dva broja a i b može smatrati da su jednaka ako je $|a-b| < 10^{-5}$.

1. Neka se matrica A može predstaviti kao zbir tri matrice $A = D + L + U$

(a) (3 poena) Napisati M-fajl `zad1a.m` sa funkcijom `[indJ, indGS] = zad1a(D,L,U)` koja za prosleđene matrice `D, L` i `U` proverava da li Jakobijeva i Gaus-Zajdelova metoda za rešavanje sistema $Ax = b$, $A =$`D+L+U` konvergiraju. Funkcija kao rezultat vraca `indJ` i `indGS` koji imaju vrednosti 1 ukoliko odgovarajuća metoda konvergira, a 0 u suprotnom.

(b) (9 poena) Ukoliko iterativna metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina (Jakobi ili Gaus-Zajdel) ne konvergira, može se probati sa *blok-iterativnim metodama.* Blok-iterativne metode se od standardnih razlikuju samo u načinu formiranja matrica D, L i U. Neka je matrica A razbijena na 4 podmatrice:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & a_{p,p+1} & \dots & a_{p,n} \\ \hline a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right].$$

Onda su: $D = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$, $L = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A_{21} & 0 \end{array}\right]$, $U = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Napisati M-fajl `zad1b.m` sa funkcijom `[X,p] = zad1b(A,b,X0,tol)` koja za prosleđenu matricu `A` pronalazi najmanji prirodan broj p za koji će i blok-Jakobijeva i blok-Gaus-Zajedelova iterativna metoda da konvergiraju, a zatim za takvo blok-rastavljanje, rešava sistem `AX=b` sa tačnošću `tol` obema metodama počevši od početne aproksimacije rešenja `X0`. Željena tačnost je postignuta kada `||A`$x^{(k)}$`-b||`$_\infty$ `< tol`. Funkcija crta grafik zavisnosti veličine `||A`$x^{(k)}$`-b||`$_\infty$ u odnosu na redni broj iteracije k za obe metode.

2. (9 poena) Napisati M-fajl `zad2.m` sa funkcijom `[XL, L] = zad2(A,tol)` koja Jakobijevom metodom određuje sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice `A` sa tačnošću `tol`. Funkcija kao rezultat vraća vektor `L` koji sadrži sortirane (u opadajućem poretku) sopstvene vrednosti matrice `A`, kao i matricu `XL` takvu da njena k-ta kolona sadrži sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti koja se nalazi na poziciji k u vektoru `L`.

3. (9 poena) *Singularne vrednosti* matrice A se određju kao $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(AA^T)}$, $k = 1, ..., n$, gde je sa $\lambda_k(AA^T)$ označena k-ta po veličini sopstvena vrednost matrice AA^T. *Rang* proizvoljne matrice A se može odrediti kao ukupan broj njenih singularnih vrednosti koje su veće od 0. Napisati M-fajl `zad3.m` sa funkcijom `rang = zad3(n,tol)` koja najpre formira matricu $A = [a_{ij}]$ tako da $a_{ij} = 1/(i+j-1)$, $i, j = 1, ...,$ `n`, a zatim na opisan način određje rang matrice A. Za određivanje sopstvenih vrednosti koristiti metodu iscrpljivanja i metodu tragova sa tačnošću `tol`.

(Na ovaj način je implementirana ugrađena MATLAB funkcija za određivanje ranga matrice.)

```
TEST PRIMERI:
>> D1=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1]
>> L1=[0 0 0; 1 0 0; 2 2 0]
>> U1=[0 2 -2; 0 0 1; 0 0 0]
>> [indJ, indGS] = zad1a(D1,L1,U1)
indJ = 1
indGS = 0

>> D2=[2 0 0; 0 2 0; 0 0 2]
>> L2=[0 0 0; 1 0 0; 1 1 0]
>> U2=[0 1 1; 0 0 2; 0 0 0]
>> [indJ, indGS] = zad1a(D2,L2,U2)
indJ = 0
indGS = 1

>> A1=[5 1 4 2 4;2 4 4 1 1; 2 4 2 4 1;4 3 4 2 3;1 4 3 4 3]
>> [X, p] = zad1b(A1,[16 12 13 16 15]',eye(5,1),1e-5)
X =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000

p = 3

>> A2=magic(7)
>> [X, p] = zad1b(A2,repmat(175,7,1),eye(7,1),1e-5)
X =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000

p = 3


>> A3=wilkinson(4)
>> [XL,L]=zad2(A3,1e-4)
XL =
    0.4998    0.6534   -0.5000   -0.2706
    0.5000    0.2707    0.5000    0.6533
    0.5001   -0.2705    0.5000   -0.6533
    0.5001   -0.6532   -0.5000    0.2706

L =
    2.5000    1.9142    0.5000   -0.9142

>> rang=zad3(8,1e-5)
rang = 4
```