Numerička analiza 1A - MATLAB kolokvijum 26.12.2018.

1. (10 poena) Neka je sa $\mathbf{x} = B_j\mathbf{x}+\mathbf{c}_j$ definisan Jakobijev iterativni algoritam, a sa $\mathbf{x} = B_w\mathbf{x}+\mathbf{c}_w$ relaksaciona metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ukoliko Jakobijev iterativni algoritam konvergira za zadati sistem i ako su sve sopstvene vrednosti matrice B_j realne, može se pokazati da se optimalan parametar w za relaksacionu metodu može odrediti sa $w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}}$ gde je ρ spektralni radijus matrice B_j. Dodatno, za spektralni radijus matrice B_w tada važi:

$$\rho(B_w) = \begin{cases} \frac{1}{4}[\ w\rho + \sqrt{(w\rho)^2 - 4(w-1)}\ ]^2, & \text{za } 0 < w \le w_{opt}, \\ w-1, & \text{za } w_{opt} \le w < 2. \end{cases}$$

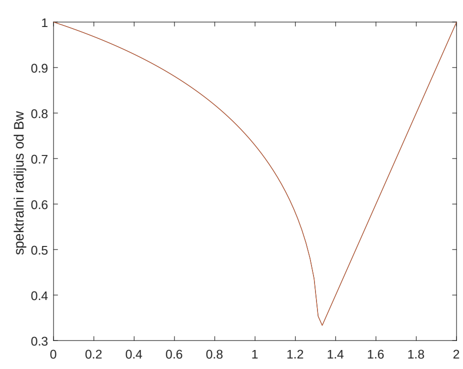
Napisati M-fajl `zad1.m` sa funkcijom `w_opt = zad1(A)` koja za prosleđenu matricu sistema linearnih jednačina $\mathtt{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ukoliko su svi navedeni uslovi za računanje optimalnog parametra `w_opt` za relaksacionu metodu po navedenoj formuli ispunjeni, prikazuje grafik zavisnosti spektralnog radijusa matrice B_w u odnosu na vrednost parametra $0 < w < 2$. Dozvoljeno je korišćenje ugrađene funkcije za određivanje sopstvenih vrednosti.

2. (10 poena) Za zadatih n gradova neka je matrica $A = [a_{ij}],\ i,j = 1,...,n$, matrica čiji element a_{ij} je jednak 1 ukoliko je grad i direktno povezan putem sa gradom j, a 0 u suprotnom. Za dijagonalne elemente važi $a_{ii} = 1,\ i = 1,...,n$. Može se dokazati da komponente sopstvenog vektora $\mathbf{x}_1$ koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrednosti λ_1 daju informaciju o pristupačnosti (mera lakoće pristupa gradu na osnovu povezanosti sa ostalim gradovima) svakog grada na sledeći način: veća vrednost (po modulu) na k-toj poziciji u vektoru $\mathbf{x}_1$ označava veću pristupačnost grada k, i obrnuto.

Napisati M-fajl `zad2.m` sa funkcijom `k = zad2(A,tol)` koja za prosleđenu matricu povezanosti gradova `A` Jakobijevom metodom određuje sopstvene vrednosti i odgovarajuće sopstvene vektore matrice `A` sa tačnošću `tol`, a zatim na osnovu tako dobijenih podataka određuje koji grad `k` , `k` $= 1,...,n$ ima najveću pristupačnost.

3. (10 poena) Ako je matrica simetrična, njena uslovljenost se može izračunati sa $cond(A) = \left|\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right|$, gde je $\lambda_{\max}$ najveća po modulu, a $\lambda_{\min}$ najmanja po modulu sopstvena vrednost matrice.

Napisati M-fajl `zad3.m` sa funkcijom `c = zad3(A,tol)` koja na opisan način određuje uslovljenost simetrične matrice `A`, pri čemu najmanju i najveću po modulu sopstvenu vrednost odrediti metodom skalarnog prozivoda sa tačnošću `tol`.




```
TEST PRIMERI:
>> A=toeplitz([3 0 2 -1]);
>> w=zad1(A)
w =   1.3153

>> B=toeplitz([3 0 2 2])
>> w=zad1(B)
Error using zad1
Jakobi ne konvergira pa se w_opt ne moze odrediti na ovaj nacir

>> C=A;
>> C(2,1)=2;
>> w=zad1(C)
Error using zad1
Nisu sve sopstvene vrednosti od matrice Bj realne pa se w_opt ne moze odrediti na ovaj nacin.


>> D=magic(7);
>> E=mod(D+D',2)+eye(7);
>> k=zad2(E,1e-3)
k = 4

>> c=zad3(E,1e-3)
c = 11.2131
```