Numerička analiza 1a - MATLAB kolokvijum 24. decembar 2016.

1.(a) (4 poena) Napisati M-fajl $zad1a.m$ sa funkcijom $w = zad1a(A)$ koja iz skupa $w \in \{0.005, 0.010, ..., 1.995\}$ (vrednosti od 0.005 do 1.995 sa korakom 0.005) određuje optimalnu vrednost parametra w za koje najbrže konvergira relaksaciona metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina sa matricom sistema A. Optimalnu vrednost za w odrediti na osnovu informacije o veličini spektralnog radijusa matrice B_w kojom je definisana relaksaciona metoda $x^{(n+1)} = B_w x^{(k)} + c$. Argument funkcije je matrica sistema A, a kao rezultat funkcija vraća optimalno w. Nacrtati grafik zavisnosti spektralnog radijusa matrice B_w od parametra w.

(b) (6 poena) Napisati M-fajl $zad1b.m$ sa funkcijom $X = zad1b(A, b, w, tol)$ koja računa i kao rezultat vraća rešenje sistema $Ax = b$ određeno relaksacionom metodom za optimalan parametar w (dobijen u delu pod (a)), sa tačnošću tol. Za početni vektor uzeti $x^{(0)} = [1,\ 0,\ ...,\ 0]^T$. Kao kriterijum zaustavljanja koristiti aposteriornu ocenu greške. Koristiti L_∞ normu. Program treba da ispiše ukupan broj iteracija koji je bio potreban da se dođe do rešenja sa zadatom tačnošću, kao i teorijski broj iteracija koje predviđa apriorna ocena greške (pogledati test primer).

2. (10 poena) QR algoritam za nalaženje sopstvenih vrednosti matrice A se može ubrzati primenom na matrice:

$$(*) \qquad A_k - p_k I = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k + p_k, \qquad k = 0, 1, ...$$

gde je $A_0 = A$ gornje Hesenbergova matrica, I je jedinična matrica, a konstante p_k se određuju na sledeći način. Neka je $A_k = [a_{ij}^{(k)}]$, $i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n$ i ako je $a_{n,n}^{(k)} \neq 0$ onda je $p_k = a_{n,n}^{(k)}$. U suprotnom, ako je $a_{n,n}^{(k)} = 0$, posmatra se podmatrica $\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(k)} & a_{n-1,n}^{(k)} \\ a_{n,n-1}^{(k)} & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}$ matrice A_k (donji desni ugao). Ova podmatrica ima dve sopstvene vrednosti λ_1 i λ_2, pa se za p_k uzima ona vrednost $\lambda_i, i = 1, 2$ koja je po apsolutnoj vrednosti veća.

Napisati M-fajl $zad2.m$ sa funkcijom $v = zad2(A, tol)$ koja modifikovanim QR algoritmom (*) odredjuje vektor sopstvenih vrednosti v polazne matrice A, sa tačnošću tol. Funkcija treba da radi samo za gornje Hesenbergove matrice. Za rastavljanje na proizvod unitarne i gornje-trougaone matrice dozvoljeno je korišćenje ugrađene MATLAB funkcije. Nigde nije dozvoljeno korišćenje ugrađene MATLAB funkcije za određivanje sopstvenih vrednosti.

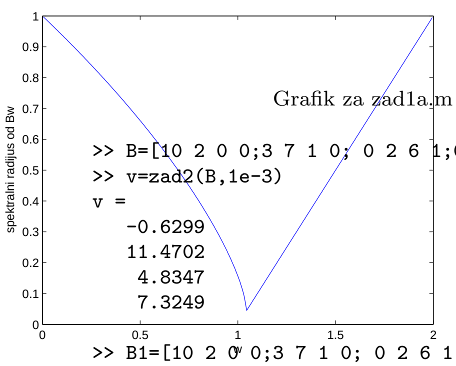
3. (10 poena) Problem nalaženja nula polinoma se može svesti na problem nalaženja sopstvenih vrednosti matrice: Moničan polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ ima nule koje odgovaraju sopstvenim vrednostima matrice

$$\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napisati M-fajl $zad3.m$ sa funkcijom $[n1, n2] = zad3(P, tol)$ koja metodom skalarnog proizvoda sa tačnošću tol nalazi najveću ($n1$) i najmanju ($n2$) po modulu nulu zadatog polinoma P.

TEST PRIMER:

```
>> A=[10 2 0 0;3 7 1 0; 0 2 6 1;0 0 4 13];
>>>> w=zad1a(A)
w = 1.0450
>> X=zad1b(A,[14 20 26 64]',1.045,1e-4)
Teorijski broj iteracija je:
     9
Realan broj iteracija je:
     6
X =
    1.0000
    2.0000
    3.0000
    4.0000
```



Grafik za zad1a.m

```
>> B=[10 2 0 0;3 7 1 0; 0 2 6 1;0 0 4 0];
>> v=zad2(B,1e-3)
v =
   -0.6299
   11.4702
    4.8347
    7.3249
>> B1=[10 2 0 0;3 7 1 0; 0 2 6 1;1 0 4 0]
>> v=zad2(B1,1e-3)
??? Error using ==> zad2
Matrica nije u gornje Hesenbergovoj formi

>> [n1,n2]=zad3([2 -10.6 14.04 -5.04],1e-4)
n1 =    3.5000
n2 =    0.6000
```