

1. (7 poena) Jacobi-jevom metodom sa tačnošću 0.05 odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7.00 & 2.24 & 2.36 \\ 2.24 & 7.00 & 0 \\ 2.36 & 0 & 7.00 \end{pmatrix}$$

2. (a) (2 poena) Napisati kvadratni funkcional čija tačka minimuma predstavlja rešenje sistema linearnih jednačina $x + 2y = 3$, $2x + 3y = 5$.

(b) (4 poena) Sa tačnošću 10^{-3} odrediti rešenje datog sistema linearnih jednačina metodom najstrmijeg spusta, polazeći od tačke $(x_0, y_0) = (3, 5)$.

3. (7 poena) Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je $\lambda_1 = 10$, a njoj odgovarajući sopstveni vektor je $\mathbf{x}_1 = (2 \ 2 \ 1 \ 1)^\top$. Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-3} drugu po veličini modula sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor ove matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. (7 poena) Jacobi-jevom metodom sa tačnošću 0.05 odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7.00 & 2.24 & 2.36 \\ 2.24 & 7.00 & 0 \\ 2.36 & 0 & 7.00 \end{pmatrix}$$

2. (a) (2 poena) Napisati kvadratni funkcional čija tačka minimuma predstavlja rešenje sistema linearnih jednačina $x + 2y = 3$, $2x + 3y = 5$.

(b) (4 poena) Sa tačnošću 10^{-3} odrediti rešenje datog sistema linearnih jednačina metodom najstrmijeg spusta, polazeći od tačke $(x_0, y_0) = (3, 5)$.

3. (7 poena) Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je $\lambda_1 = 10$, a njoj odgovarajući sopstveni vektor je $\mathbf{x}_1 = (2 \ 2 \ 1 \ 1)^\top$. Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-3} drugu po veličini modula sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor ove matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

REŠENJA:

1.

$$U_{1,3} = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 9.36 & 1.5839 & 0 \\ 1.5839 & 7 & -1.5839 \\ 0 & -1.5839 & 4.64 \end{pmatrix}$$

$$U_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.8937 & 0.4486 & 0 \\ -0.4486 & 0.8937 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 10.1551 & 0 & -0.1706 \\ 0 & 6.2048 & -1.4156 \\ -0.1706 & -1.4156 & 4.64 \end{pmatrix}$$

$$U_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9724 & -0.2332 \\ 0 & 0.2332 & 0.9724 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 10.1551 & 0.3610 & -0.6121 \\ 0.3610 & 7.0398 & 0 \\ -0.6121 & 0 & 3.8050 \end{pmatrix}$$

$$U_{1,3} = \begin{pmatrix} 0.9954 & 0 & -0.0962 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0962 & 0 & 0.9954 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 10.2136 & 0.3594 & 0 \\ 0.3594 & 7.0398 & 0.0343 \\ 0 & 0.0343 & 3.7466 \end{pmatrix}$$

$$U_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.9938 & 0.1111 & 0 \\ -0.1111 & 0.9938 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 10.2538 & 0 & 0.0038 \\ 0 & 6.9996 & 0.0341 \\ 0.0038 & 0.0341 & 3.7466 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3.75, \quad \lambda_2 = 7.00, \quad \lambda_3 = 10.25$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -0.71 \\ 0.49 \\ 0.51 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.72 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.49 \\ 0.51 \end{pmatrix}$$

2.

a)
$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{b}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2xy - 3x - 5y.$$

b)

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = 0.2361,$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6393 \\ 1.2228 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0849 \\ -0.0531 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -4.2381,$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9990 \\ 0.9980 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.0051 \\ -0.0081 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 0.2361,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 0.9999 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.43 * 10^{-4} \\ 0.27 * 10^{-4} \end{pmatrix}$$

3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 5, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

v1 = [1 0 -1 -1]

w1 = [1 0 -1 -1]

ln = 3

v1 = [3 2 -5 -5]

w1 = [3 2 -5 -5]

$\ln = 4.8462$

$v1 = [13 \ 12 \ -25 \ -25]$

$w1 = [13 \ 12 \ -25 \ -25]$

$\ln = 4.9936$

$v1 = [63 \ 62 \ -125 \ -125]$

$w1 = [63 \ 62 \ -125 \ -125]$

$\ln = 4.9997$

$v1 = [313 \ 312 \ -625 \ -625]$

$w1 = [313 \ 312 \ -625 \ -625]$

$\ln = 5.0000$

$x = [0.3167 \ 0.3157 \ -0.6325 \ -0.6325]$