Numerička analiza 1A - Februar 2016.

1. Dat je sistem linearnih jednačina $Ax = b$ gde je:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & t & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) (5 poena) Odrediti za koje se sve parametre $t \in R$ sistem moze rešiti Gauss-Seidelovom metodom.

(b) (3 poena) Za $t = \frac{1}{4}$ rešiti sistem Gauss-Seidelovom metodom sa tačnošću 10^{-4}, ako je početni vektor $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 0.5 \\ 1.5 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

a)(3 poena) Za zadatu matricu A, odrediti Gershgorin-ove krugove i lokalizovati njene sopstvene vrednosti.

b)(3 poena) Metodom interpolacije naći karakterističan polinom matrice A.

3.(6 poena) Metodom skalarnog proizvoda sa tačnošću $5 \cdot 10^{-3}$ odrediti spektralni radijus matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $[1, 1, 1, 1]^T$.

Numerička analiza 1A - Februar 2016.

1. Dat je sistem linearnih jednačina $Ax = b$ gde je:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & t & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) (5 poena) Odrediti za koje se sve parametre $t \in R$ sistem moze rešiti Gauss-Seidelovom metodom.

(b) (3 poena) Za $t = \frac{1}{4}$ rešiti sistem Gauss-Seidelovom metodom sa tačnošću 10^{-4}, ako je početni vektor $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 0.5 \\ 1.5 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

a)(3 poena) Za zadatu matricu A, odrediti Gershgorin-ove krugove i lokalizovati njene sopstvene vrednosti.

b)(3 poena) Metodom interpolacije naći karakterističan polinom matrice A.

3.(6 poena) Metodom skalarnog proizvoda sa tačnošću $5 \cdot 10^{-3}$ odrediti spektralni radijus matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $[1, 1, 1, 1]^T$.

REŠENJA:

1.

$$A=\begin{pmatrix}20&10&5\\0&1&-4\\0&t&2\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}20&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&t&0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}0&10&5\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B_{GS}=-(L+D)^{-1}\cdot U=\begin{pmatrix}20&0&0\\0&1&0\\0&t&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&10&5\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-40&20t\\0&0&-20\end{pmatrix}^{T}\cdot\begin{pmatrix}0&10&5\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&-4\\0&0&-2t\end{pmatrix}$$

$$det(B_{BS})=\begin{vmatrix}-\lambda&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&-\lambda&-4\\0&0&-2t-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(-2t-\lambda)=0$$

$$\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=-2t$$

Kako mora biti $|\lambda_{\max}|<1\Rightarrow|2t|<1\Rightarrow-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$.

(b) $c=[1,4,0]^T$

$x^{(0)}=[1,0,0]^T,\qquad x^{(1)}=B_{GS}\cdot[1,0,0]^T+c=[1,4,0]^T,\qquad err=||x^{(1)}-x^{(0)}||=4$

$x^{(2)}=B_{GS}\cdot[1,4,0]^T+c=[-1,4,0]^T,\qquad err=||x^{(2)}-x^{(1)}||=2$

$x^{(3)}=B_{GS}\cdot[-1,4,0]^T+c=[-1,4,0]^T,\qquad err=||x^{(3)}-x^{(2)}||=0$

2.

a)

$$R1:\{|z|:|z-10|\le 5\},C1:\{|z|:|z-10|\le 2.5\}$$

$$R2:\{|z|:|z-10|\le 1.5\},C2:\{|z|:|z-10|\le 7\}$$

$$R3:\{|z|:|z-20|\le 4.5\},C3:\{|z|:|z-20|\le 1.5\}$$

$$\lambda_{1,2,3}\in[5,15]\cup[18.5,21.5]$$

b)

λ	$D(\lambda)$	$\Delta D(\lambda)$	$\Delta^2 D(\lambda)$	$\Delta^3 D(\lambda)$
5	315	-71	9	-1
10	-40	28	-7	
16	128	-49		
21				

$$-\lambda^3+40\lambda^2-496\lambda+1920$$

3. Matrica A je simetrična, te nema potrebe za računanjem vektora w (biće uvek jednak vektoru v).

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$(v^{(k)},v^{(k)})$	$(v^{(k-1)},v^{(k)})$	λ
0	1	1	1	1			
1	11	11	12	6	422	40	10.55000
2	119	112	128	63	47058	4455	10.56296
3	1259	1171	1363	662	5252335	497143	10.56504