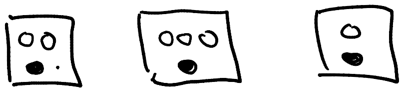
Thursday, January 13, 2022
9:28 AM

(*) Date su 3 kutije 

Nasumice biramo jednu kutiju i iz nje jednu kuglicu.
Naći vrv. da je izvučena kuglica bela.
(Potpuna vrv.)

H_1 - izabrana I kutija
H_2 - II
H_3 - III

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

A - izvučena bela kuglica

$P(A) = ?$ $\qquad P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$

$P(A|H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A|H_3) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \ldots = \frac{23}{36}$$

Bajesova f-la: Ako je izvučena bela kuglica koja je vrv. da je izvučena iz II kutije?

$$P(H_2|A) = ?$$

Bajes:

$$\boxed{\begin{aligned} P(AH_i) &= P(A) \cdot P(H_i|A) \\ P(H_iA) &= P(H_i) \cdot P(A|H_i) \end{aligned}}$$

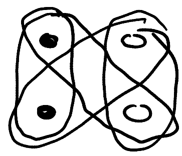
$$\Rightarrow P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)}$$

f-la potpune vrv.

Thursday, January 13, 2022
9:28 AM

(*) Dva strelca nezavisno jedan od drugog gađaju metu ispaljujući 1 metak. Ver. da I pogodi je 0.8, a drugi 0.4. Posle izvedenog gađanja meta je pogođena tačno jednom. Naći vrv. da je pogodio prvi.

I
II



H_1 - obojica su promašila $\qquad P(A|H_1)=0$

H_2 - oba su pogodila $\qquad P(A|H_2)=0$

H_3 - prvi pogodio, drugi promašio $\qquad P(A|H_3)=1$

H_4 - drugi pogodio, prvi promašio $\qquad P(A|H_4)=1$

A - meta pogođena tačno 1

$P(H_3|A)=?$ (Bayes)

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{\sum_{k=1}^{4} P(H_k)\cdot P(A|H_k)}$$

$P(H_1)$, $P(H_2)$ - nepotrebni (množe se sa 0)

$P(H_3)=$ (prvi pogodio i drugi promašio) $= 0.8\cdot 0.6 = 0.48$

pogađa 0.4

$\overline{\text{pogodak}}$ = promašio $= 1-0.4=0.6$

$P(H_4)=$ (prvi promašio i drugi pogodio) $= 0.2\cdot 0.4 = 0.08$

promašio = $\overline{\text{pogodio}}$ $\qquad$ 0.4

$1-0.8=0.2$

$$P(H_3|A)=\frac{0.48\cdot 1}{\underbrace{0.48\cdot 1}_{H_3}+\underbrace{0.08\cdot 1}_{H_4}} = \dots = \frac{6}{7}$$

Thursday, January 13, 2022
9:28 AM

(*) Osoba se podvrgla testu na bolest od koje oboljeva 1% populacije. Pouzdanost testa je 79% (ako bolest postoji test uvek daje pozitivan rezultat, a sa 21% slučajeva dešava se pozitivan rezultat i kad bolest nije prisutna - lažni pozitivni test).

Nakon testiranja osoba je dobila pozitivan test. Koja je vrv. da osoba ima bolest?

H_1 - osoba ima bolest $\qquad p(H_1) = 0.01 \quad (1\%)$

H_2 - osoba nema bolest $\qquad p(H_2) = 1 - p(H_1) = 0.99$

S - osoba dobila pozitivan rez. $\qquad p(S|H_1) = 1$ (test negreši) $\qquad p(S|H_2) = 0.21 \quad (21\%)$

$p(H_1|S) = ?$ (Bajes)

$$p(H_1|S) = \frac{p(H_1)\cdot p(S|H_1)}{p(H_1)\cdot p(S|H_1) + p(H_2)\cdot p(S|H_2)}$$

$$= \frac{0.01\cdot 1}{0.01\cdot 1 + 0.99\cdot 0.21} = 0.049 \quad (\approx 5\%)$$

Thursday, January 13, 2022
9:29 AM

direktor	100.000	
sekretarica	30.000	
10 radnika	10.000	

$\Sigma = 230.000$
$: 12$ radnika
$= 19.166$

srednja vrednost (prosek)

10 10 10 10 10 10 | 10 10 10 10 30 100

10 MEDIJANA

(prosek , odstupanje)

:(:)

≈ 80.000

Diskretna slučajna promenljiva

Slučajna promenljiva je funkcija $X = X(A), A \subset \Omega$ koja svakom elementarnom događaju dodeljuje realan broj.

Diskretna slučajna promenljiva je slučajna promenljiva koja može da uzme konačan ili prebrojivo beskonačan broj vrednosti.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ - skup vrednosti sluč. prom. X

$p_1, \dots, p_n$ - VRV. da se dogodila vrednost $x_1, \dots, x_n$

$\hookrightarrow p_i = p(X = x_i)$ (VRV. da sluč. prom. X ima vrednost x_i)

$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \dots + p_n = 1$!

$\{(x_i, p_i) \mid x_i \in X, p_i = p(X = x_i), i = 1, \dots, n\} \rightarrow$ ZAKON RASPODELE VRV. SLUČ. PROM. X

Thursday, January 13, 2022
9:29 AM

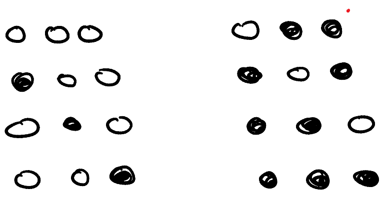
(*) Odrediti zakon raspodele vrv. pojave grba pri bacanju 3 novčića.

X - broj pojave grba

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	2	3

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

} zakon rasp. verv. → mora $\Sigma = 1$



$p_1 = P(X = x_1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$
grb nije pao ni jednom

$p_2 = P(X = x_2) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$
grb pao tačno jednom

$p_3 = P(X = x_3) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$
grb pao tačno 2 puta

$p_4 = P(X = x_4) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Def: Matematičko očekivanje distr. sluč. prom. X je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + p_4 \cdot x_4$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = 1.5$$

Teorema:

1) $E(C) = C$, $C = \text{const}$
$= C \cdot 1$

X	C
P	1

← 1

2) $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$, k - const

X	x_1	..	x_n
P	p_1	...	p_n

kX	$k \cdot x_1$	...	$k \cdot x_n$
P	p_1	..	p_n

$E(X) = \sum p_i x_i$

$E(k \cdot X) = \sum k \cdot x_i \cdot p_i$
$= k \cdot \sum x_i p_i$
$= k \cdot E(X)$

3) $E(X+Y) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) \cdot p_i \cdot q_j$

X	x_i
P	p_i

Y	y_i
q	q_i

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	$\dots$
verov.	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$\dots$

4) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

Def: Disperzija diskr. sluč. prom. X je matematičko očekivanje kvadrata razlike sluč. prom. i njenog mat. očekivanja: $D(X) = E(X - E(X))^2$

Teorema: $D(X) = \underbrace{E(X^2)} - (\underbrace{E(X)}_{\text{već izračunali}})^2$ $(1.5)^2$

X^2	0^2	1^2	2^2	3^2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X^2) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 9$
$= 3$

$D(X) = 3 - 1.5^2 = 0.75$

$(E(X), D(X))$

(*)

X	-1	1
P	0.5	0.5

$E(X) = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

X^2	$(-1)^2$	1^2
P	0.5	0.5

$\rightarrow$

X^2	1	1
P	0.5	0.5

$\rightarrow$

X^2	1
P	$0.5+0.5=1$

$D(X) = 1 - 0 = 1$

(*) Dat uzorak : 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7

14 brojeva

x	1	3	4	5	6	7
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$

$$E(x) = 1\cdot\frac{1}{14} + 3\cdot\frac{2}{14} + 4\cdot\frac{4}{14} + 5\cdot\frac{3}{14} + 6\cdot\frac{3}{14} + 7\cdot\frac{1}{14}$$
$$= \frac{63}{14}$$

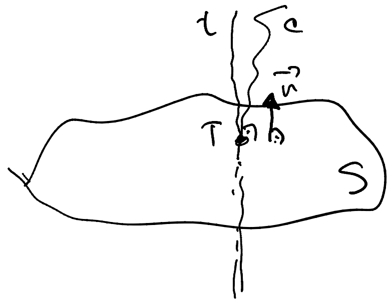
x^2	1	9	16	25	36	49
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$

$$D(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = 1\cdot\frac{1}{14} + \dots + 49\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \dots \heartsuit$$

$$D(x) = \heartsuit - \left(\frac{63}{14}\right)^2 = \dots$$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - x - 1 = -1$$



$t \perp \vec{n}$ y

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) = x^3 y + \ln y = 0 \\ f_2(x,y) = e^x + \frac{x}{y} = 0 \end{array}\right\} \to \exists F \quad X = 0$$

$F' = ?$

$f = (f_1, f_2)$ $\qquad (f_1, f_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$