Verovatnoća

December 23, 2019

Kombinatorika

Na koliko načina možemo da izaberemo elemente nekog skupa?

Tri osnovna elementa kombinatorike su: permutacija, varijacija i kombinacija.

Razlikuju se u odgovorima na sledeća pitanja:

1) Da li su izabrani svi elementi početnog skupa?
2) Da li je redosled izabranih bitan?

1) Da li su izabrani svi elementi početnog skupa?
2) Da li je redosled izabranih bitan?

1)	2)	
DA	DA	**PERMUTACIJA** a) bez ponavljanja $P(n) = n!$ b) sa ponavljanjem $P(n, m_1, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!}$
NE	DA	**VARIJACIJA** a) bez ponavljanja $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ b) sa ponavljanjem $\overline{V}_n^k = n^k$
NE	NE	**KOMBINACIJA** a) bez ponavljanja $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ b) sa ponavljanjem $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Primeri

- Poređati 3 knjige na policu
- Poređati na policu 3 iste knjige, 2 iste zbirke i svesku
- Od 25 učenika izabrati predsednika, blagajnika i sekretara
- Koliko trocifrenih brojeva se može zapisati pomoću cifara 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (sa i bez ponavljanja cifara)
- Loto

- Osobe A i B ulažu novac i igraju igru u kojoj je pobednik onaj koji prvi osvoji 3 partije. Pobednik uzima sav novac. Iz nekog razloga, igra je morala biti prekinuta u trenutku kada je rezultat bio 2:1 u korist igrača A. Kako pravedno podeliti novac?

Slučajni događaji

- Posmatrajmo neku pojavu ili eksperiment. Jedan određen ishod pojave ili eksperimenta naziva se **događaj**. Događaje označavamo sa $A, B, C, \ldots$.
- Ako je događaj neminovan iskod pojave/eksperimenta on se zove **siguran događaj**. Označavamo ga sa Ω.
- Događaj je **nemoguć** ako se pri datim uslovima ne može realizovati. Označavamo ga sa $\emptyset$.
- Ako se realizacija događaja ne može predvideti onda je on **slučajni događaj**.

- Događaji A i B su **disjunktni** ako realizacija jednog isključuje realizaciju drugog.
- **Unija** dva događaja A i B ($A \cup B, A + B$) je događaj čija se realizacija sastoji u realizaciji bar jednog događaja A ili B.
- **Presek/proizvod** dva događaja A i B ($A \cap B, AB$) je događaj koji se realizuje realizacijom oba događaja i A i B.
- Događaji koji se ne mogu razložiti na prostije događaje zovu se **elementarni događaji**.
- Elementarni događaji $w_1, ..., w_n$ čine **potpun sistem događaja** ako su međusobno disjunktni i ako pojava/eksperiment kao svoj ishod ima jedan od ovih događaja, tj. ako:
  $w_i w_k = \emptyset$, za $i \neq k$, je nemoguć događaj i
  $w_1 + ... + w_n = \Omega$ je siguran događaj.

Klasična/Laplasova definicija verovatnoće

Neka je $\{w_1, ..., w_n\}$ potpun (konačan) sistem događaja (skup svih mogućih ishoda) i neka su svi događaji podjednako mogući da budu ishod.

Neka se događaj A realizuje pri realizaciji bilo kog od elementarnih događaja $w_{i1}, ..., w_{ik}$.

Verovatnoća događaja A se definiše kao $p(A) = \frac{k}{n}$ tj. kao količnik broja povoljnih i broja svih elementarnih događaja.

- Za siguran događaj, svaki elementarni je povoljan pa je $p(\Omega) = 1$.
- Za nemoguć događaj je $k = 0$ pa je $p(\emptyset) = 0$.

Geometrijska verovatnoća

Neka je broj mogućih ishoda neke pojave beskonačan (npr. biramo tačku neke oblasti).

Svakom ishodu dodelimo jednu tačku konačne oblasti S.

Neka povoljnim ishodima odgovaraju tačke u podoblasti $\alpha \subset S$.

$P(A) = \frac{\text{mera oblasti}\alpha}{\text{mera oblasti}S}$.

Statistička verovatnoća

Neka se eksperiment može ponavljati neograničen broj puta uz iste uslove.

Neka je A slučajni događaj.

Neka se eksperiment ponavljao n puta, a A realizovao m puta.

Broj $\frac{m}{n}$ je **relativna frekvencija događaja**.

Povećanjem n ovaj broj postaje "skoro stalan" i $p(A) = \frac{m}{n}$ se naziva statistička verovatnoća.

Opšta definicija verovatnoće

Neka je Ω skup svih elementarnih događaja. Funkcija $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ koja slika partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$ u $[0,1] \subset \mathbb{R}$ naziva se verovatnoća ako važi:

1) $p(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$,
2) $p(\Omega) = 1$,
3) Ako su $A_1, ..., A_n$ disjunktni, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ onda je $p(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(A_i)$.

Svojstva verovatnoće

- **Suprotan događaj** događaju A je $\overline{A}$ koji se ostvaruje onda kada se A ne ostvaruje.
  Važi $\overline{\overline{A}} = A$.
  Pošto je $A + \overline{A} = \Omega$ onda sledi da je $p(A) + p(\overline{A}) = 1$.
- Ako je $A \subseteq B$ onda je $p(A) \leq p(B)$ (dokaz na času).
- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$ (dokaz na času).

Uslovna verovatnoća

Definicija

Uslovna verovatnoća *događaja B pod uslovom da se događaj A realizovao definiše se kao* $p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)}$.

Iz definicije: $p(AB) = p(A) \cdot p(B|A)$.
Slično: $p(BA) = p(B) \cdot p(A|B)$.
Kako je $p(AB) = p(BA) \rightarrow p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B)$.

Definicija

Događaj A je ***nezavisan*** *od događaja B ako je* $p(A|B) = p(A)$.

Teorema

Za događaje A i B sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1. $p(A|B) = p(A)$
2. $p(B|A) = p(B)$
3. $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$

Dokaz na času.

Posledica

Ako su A i B nezavisni događaji onda
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$.

Formula potpune verovatnoće

Pitanje: Koja je verovatnoća događaja A ako su verovatnoće događaja H_i, realizovanih pre A, unapred poznate?

- Neka su $H_1, ..., H_n \subset \Omega$ međusobno disjunktni. Oni čine **razbijanje** događaja Ω ako je $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.
- Neka je A događaj koji se može realizovati istovremeno samo sa jednim od događaja $H_1, ..., H_n$.
- Događaji $H_1A, ..., H_nA$ su takođe disjunktni i važi
  $A = H_1A + ... + H_nA$
  $\Rightarrow p(A) = p(H_1A) + ... + p(H_nA)$
  $\Rightarrow p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + ... + p(H_n)p(A|H_n)$
  $\Rightarrow p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A|H_i)$ **- formula potpune/totalne verovatnoće**

Bajesova formula

Pitanje: Koja je verovatnoća da je događaj H_i uzrokovao realizaciju događaja A?

Teorema

Bajesova formula

Neka događaji $\{H_1, ..., H_n\}$ čine potpun sistem disjunktnih događaja. Pretpostavimo da se događaj A realizovao. Tada:

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(H_k)p(A|H_k)}.$$

Dokaz na času.