MATEMATIKA 1 - TEORIJA G1 - 18.01.2019.

Ime i prezime: ____________________________

Broj indeksa: ____________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

1. (3p.) Ako je A invertibilna matrica onda je $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Dokazati.

Rešenje:
Pošto je A invertibilna: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2. (3p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Ako je $B = \{v_1, v_2\}$ baza vektorskog prostora V onda je skup vektora $\{-v_1, -v_2\}$ takođe baza prostora V.

(b) Skup vektora $\{[1,0],[0,1],[0,0]\}$ je pokrivač vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(c) Ako je $S = \{v_1, ..., v_k\}$ pokrivač vektorstog prostora V, onda je dimenzija prostora V jednaka k.

(d) Vektor $v_1 = [1,1]$ je linearna kombinacija vektora $v_2 = [2,0]$ i $v_3 = [0,3]$.

(e) Vektori $v_1 = [1,1,1]$, $v_2 = [1,2,3]$ i $v_3 = [0,0,0]$ su linearno nezavisni.

Rešenje:
Tačni su (a) i (d).

3. (2p.) Navesti Vajerštrasov kriterijum za ispitivanje uniformne konvergencije funkcionalnih redova.

Rešenje:
Neka za svako $x \in (a,b)$ i za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $|f_k(x)| < M_k, 0 < M_k < \infty$. Ako je prozitivan brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergentan, tada je funkcionalni red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergentan na (a,b).

4. (2p.) Navesti definiciju stacionarne tačke funkcije $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$.

Rešenje:
Tačka x_0 je stacionarna tačka funkcije f ako su svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački x_0 jednaki 0.

5. (3p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Neka je sa $\vec{r}\,(t)$ zadata parametrizacija putanje dužine 1 na $[a,b]$. Onda je $\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt = 1$.

(b) Neka je sa $\vec{r}\,(t) = t\cdot\vec{i} + \sin(t)\cdot\vec{j}, t \in [0, 2\pi]$ data parametrizacija krive u ravni. Onda je dužina luka krive $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2(t)}dt$.

(c) Važi $\int_0^1\int_0^x xdydx = \int_0^1\int_0^y xdxdy$.

(d) Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]\times[c,d]$ onda važi $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dydx$.

(e) Ako kriva C seče površ S pod pravim uglom u tački T, onda je tangenta na krivu u tački T normalna na vektor normale površi S.

(f) $\iint\limits_S dS$ je površina oblasti S.

Rešenje:
Tačni su (a), (b) i (f).

6. (3p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) $\frac{dy}{dx} = yx^2$ je ujedno i linearna diferencijalna jednačina i diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim.

(b) $y' + y^3x + y^2x = 0$ je Rikatijeva diferencijalna jednačina.

(c) $y''' + (1+x)y' + x = 0$ je linearna diferencijalna jednačina reda 3.

(d) $3x^4y'' + e^y y' = 0$ je homogena linearna diferencijalna jednačina reda 2.

(e) $y'' + xy' + y = 0$ je homogena linearna diferencijalna jednačina reda 2 sa konstantnim koeficijentima.

(f) $2y'' + 3y' + 4y - 5x = 0$ je nehomogena linearna diferencijalna jednačina reda 2 sa konstantnim koeficijentima.

Rešenje:
Tačni su (a), (c) i (f)

7. (2p.) Neka su A, B i C slučajni događaji takvi da je $p(A) = \frac{1}{2}, p(B) = \frac{1}{3}, p(C) = \frac{1}{6}, p(AB) = p(AC) = p(BC) = \frac{1}{6}$. Ispitati da li su događaji A i C nezavisni.

Rešenje:
$p(AC) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12} = p(A)p(C)$.

8. (2 poena) Data je diskretna slučajna promenljiva $\begin{array}{c|c|c} X & -1 & 1 \\ \hline p & 0.5 & 0.5 \end{array}$. Odrediti disperziju $D(X)$.
Rešenje:

$E(X) = -1 * 0.5 + 1 * 0.5 = 0$
$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1 * 1 - 0 = 1$.