MATEMATIKA 2 - TEORIJA G1 - Januar 2017.

Ime i prezime:______________________________

Broj indeksa: ______________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

1. (1p.) Ako su $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(b) $Re(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$

(c) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

(d) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Rešenje: a i d

2. (1p.) Da li je skup svih vektora $v \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $\|v\| = 1$ podprostor od $\mathbb{R}^n$? Obrazložiti odgovor.

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$
$V = \{v \in \mathbb{R}^n | \|v\| = 1\}$
$x + y \notin V, \lambda x \notin V$

3. (1p.) Neka je matrica A dimenzije 5x3, matrica B dimenzije 3x3, matrica C dimenzije 3x2 i matrice D i E dimenzija 2x1. Zaokružiti koji od sledećih izraza jesu dobro definisani i upisati pored koje dimenzije je rezultat.

(a) A^6

(b) AB^{-1} 5x3

(c) $ACDE$

(d) $CD + CE$ 3x1

(e) BA^TA 3x5

4. (2p.) Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna u nekoj tački, onda je ona i diferencijabilna u toj tački.

(b) Ako je $f(x, y)$ funkcija dve promenljive takva da postoje svi parcijalni izvodi i neprekidni su, onda važi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(c) Svaka funkcija $f(x, y)$ dve promenljive ima ili globalni minimum ili globalni maksimum.

(d) Ako su $f(x, y)$ i $g(x, y)$ dve funkcije i (2,3,3) kritična tačka za funkciju $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, onda je (2,3) rešenje Lagranžove jednačine za ekstremizaciju funkcije $f(x, y)$ pri uslovu $g(x, y) = 0$.

Resenje: b i d

5. (1p.) Navesti definiciju konvergencije na intervalu funkcionalnog reda.

Red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira na intervalu (a,b) ako niz parcijalnih suma $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ konvergira na intervalu (a,b). (konvergira u svakoj tački). $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$.

6. (1p.) Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A = [1,3] \times [0,4]$ neprekidna funkcija. Formulisati Fubinijevu teoremu.

$$\int\limits_A\int f(x,y)dxdy = \int\limits_1^3(\int\limits_0^4 f(x,y)dy)dx = \int\limits_0^4(\int\limits_1^3 f(x,y)dx)dy$$

7. (1p.) Navesti definiciju tangentne ravni površi S kroz tačku $M \in S$.

Ravan T kroz tačku $M \in S$ je tangentna ravan površi S ako tangentni vektor svake krive te površi koja prolazi kroz M pripada T.

8. (2p.) Za svaku diferencijalnu jednačinu napisati kog je reda i da li je linearna ili ne.

(a) $y'' \sin(t) + (1-t^2)y' + \cos(t)y = 0$ - red 2, linearna

(b) $y'' + (y')^3 + y = 0$ - red 2, nije linearna

(c) $\ln(t)\frac{d^2y}{dt^2} + 3e^t\frac{dy}{dt} - y\sin(t) = 0$ - red 2, linearna

(d) $\frac{d^3y}{dt^3} + (t^2-1)\frac{dy}{dt} + \cos(t) = 0$ - red 3, linearna

MATEMATIKA 2 - TEORIJA G2 - Januar 2017.

Ime i prezime:____________________________

Broj indeksa: ____________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

1. (1p.) Ako su $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) $|z| = z \cdot \overline{z}$

(b) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(c) $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$

(d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Resenje: b i d

2. (1p.) Da li je skup svih vektora $v \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $\|v\| = 2$ podprostor od $\mathbb{R}^n$? Obrazložiti odgovor.

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$
$V = \{v \in \mathbb{R}^n | \|v\| = 2\}$
$x + y \notin V, \lambda x \notin V$

3. (1p.) Neka je matrica A dimenzije 5x3, matrica B dimenzije 3x3, matrica C dimenzije 3x2 i matrice D i E dimenzija 2x1. Zaokružiti koji od sledećih izraza jesu dobro definisani i upisati pored koje dimenzije je rezultat.

(a) B^4 3x3

(b) $B^{-1}C$ 3x2

(c) $ABCD$

(d) $AB + AC$

(e) $C^T BA^T$ 2x5

4. (2p.) Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj tački, onda je ona i neprekidna u toj tački.

(b) Ako je $f(x, y)$ funkcija dve promenljive takva da postoje svi parcijalni izvodi i neprekidni su, onda važi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(c) Svaka glatka funkcija $f(x, y)$ koja ima globalni minimum ima i globalni maksimum.

(d) Ako su $f(x, y)$ i $g(x, y)$ dve funkcije i (3,2,3) kritična tačka za funkciju $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, onda je (3,2) rešenje Lagranžove jednačine za ekstremizaciju funkcije $f(x, y)$ pri uslovu $g(x, y) = 0$.

Resenje: a i d

5. (1p.) Navesti definiciju uniformne konvergencije na intervalu funkcionalnog reda.

Red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira na intervalu (a,b) ka funkciji $S(x)$ ako niz parcijalnih suma $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ uniformno konvergira ka $S(x)$ na (a,b).

6. (1p.) Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A = [0,4] \times [1,3]$ neprekidna funkcija. Formulisati Fubinijevu teoremu.

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int_0^4 (\int_1^3 f(x,y)dy)dx = \int_1^3 (\int_0^4 f(x,y)dx)dy$$

7. (1p.) Navesti definiciju normale površi S u tački $M \in S$.

Prava L koja prolazi kroz $M \in S$ i pri tom je normalna na tangentnu ravan površi S u M je normala povrsi S u M.

8. (2p.) Za svaku diferencijalnu jednačinu napisati kog je reda i da li je linearna ili ne.

(a) $y''' + \sin(t)y = (t^2 - t)y' - e^t y''$ - red 3, linerana

(b) $(y'')^2 = y^5 - y'y'''$ - red 3, nije linearna

(c) $(\frac{d^2y}{dt^2})^3 + (\frac{dy}{dt})^3 + y^3 = t^3$ - red 2, nije linearna

(d) $(1+y)\sin^2(t) + (\frac{d^3y}{dt^3} + y)\cos^2(t) = 1$ - red 3, linearna