MATEMATIKA 2 - TEORIJA - Kolokvijum2 2020/21.

Ime i prezime:____________________________
Broj indeksa: ____________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

1. (1.5p.) Izvesti Jakobijan ($\det(J)$) za smenu promenljivih u eliptičke koordinate u dvostrukom integralu.

Rešenje:
$x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi.$

$$J = \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = a\cdot b\cdot\cos\varphi\cdot\rho\cdot\cos\varphi + a\cdot b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\varphi = a\cdot b\cdot\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = a\cdot b\cdot\rho.$$

2. (1p.) Navesti definiciju deo-po-deo glatke krive $\vec{r}\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$.

Rešenje:Kriva je deo-po-deo glatka ako postoji podela segmenta $[a,b]$ $P: a = S_0 < S_1 < ... < S_m = b$ takva da je kriva glatka na svakom os segmenata $[S_{j-1}, S_j]$.

3. (1.5p.) Neka je kriva C data parametrizacijom $\vec{r}\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ i neka je $S: D\to\mathbb{R}^3$ gde je $D\subset\mathbb{R}^2$ ograničena oblast. Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako se za svaku tačku $M\in S$ i za svaku zatvorenu krivu na površi S koja sadrži M, promenljivi vektor normale vraća u početni položaj onda je S jednostrana površ.

(b) Promenom strane površi po kojoj se vrši integracija menja se znak površinskog integrala druge vrste.

(c) Prava koja prolazi kroz tačku $M\in S$ i pri tom je normalna na tangentnu ravan površi u M naziva se tangenta površi S u tački M.

(d) Dužina rektificijabilne krive C jednaka je $\int\limits_a^b \sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)}dt$.

(e) Krivolinijski integral prve vrste podintegralne funkcije $f\equiv 1$ po krivoj C jednak je dužini krive C.

(f) Ako je $P(x,y,z)$ neprekidna na C, $\vec{r}\,(a) = A$ i $\vec{r}\,(b) = B$ onda $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int\limits_{BA} P(x,y,z)dx$.

Rešenje: Tačni su b) i e)

4. (1.5p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Homogena diferencijalna jednačina prvog reda $y' = f(x,y)$ se odgovarajućom smenom može transformisati u jednačinu sa razdvojenim promenljivim.

(b) Opšti oblik Bernulijeve diferencijalne jednačine prvog reda je oblika $y'' + P(x)y' = y^nQ(x)$.

(c) Ukoliko je poznato jedno partikularno rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine prvog reda, onda se odgovarajućom smenom ona može svesti na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

(d) $\frac{dy}{dx} = x + y$ je diferencijalna jednačina prvog reda sa razdvojenim promenljivim.

(e) Rešenja $y_1, ..., y_n$ homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda s konstantnim koeficijentima su linearno nezavisna akko je Vronskijan $W(y_1(x), ..., y_n(x)) = 0$.

Rešenje: Tačni su a) i c)

5. (1.5p.) Ako $y(x) = y_1(x) + i \cdot y_2(x)$ zadovoljava homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, onda je zadovoljavaju i $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Dokazati.

6. (1.5p.) U kutiji se nalazi 8 crvenih, 15 belih, 24 crne i 17 narandžastih kuglica. Izvlače se dve kuglice i to tako što se nakon prvog izvlačenja izvučena kuglica vraća u kutiju. Kolika je verovatnoća da se u drugom izvlačenju izvuče bela kuglica ako je u prvom izvlačenju izvučena crvena kuglica?

A- crvena
B- bela
$p(A) = 8/64, p(AB) = 8/64 * 15/64$ $p(B|A) = p(AB)/p(A) = 15/64$

7. (1.5p.) Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$. Izračunati disperziju za X.

Rešenje: $E(X) = 1.5, E(X^2) = 6.5, D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6.5 - 1.5^2 = 4.25$