MATEMATIKA 2 - TEORIJA G1 - Kolokvijum1 2021/22.

Ime i prezime:______________________________

Broj indeksa: ______________________________

1. Odrediti parametar $k \in \mathbb{R}$ tako da vektor $(k, 3, 10)$ bude linearna kombinacija vektora $(-1, 0, 1)$ i $(2, 1, 4)$.

Rešenje: slajd 5:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/vektorski%20prostori.pdf`

$\alpha(-1, 0, 1) + \beta(2, 1, 4) = (k, 3, 10)$
Dobija se:
$-\alpha + 2\beta = k$
$0\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 3$
$\alpha + 4\beta = 10 \Rightarrow \alpha = -2$

$\Rightarrow k = 2 + 2 \cdot 3 = 8.$

2. Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Ako je A kvadratna matrica onda $\det(AA^T) = 1$.
NE. $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2$. Osim ako nije $\det(A) = 1$ ovo za proizvoljnu matricu A ne važi.
(b) Ako su A i B matrice dimenzije $m \times n$ onda je $A + B = B + A$
DA. $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ (kad god su dimenzije matrica A i B iste) $= [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}]$
(c) Ako su A i B invertibilne matrice onda $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
NE. Na primer: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$.
$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$
(d) Ako su A i B kvadratne matrice i ako je A invertibilna onda je $A^{-1}BA = B$.
NE. $A^{-1}BA \neq BA^{-1}A$ u opštem slučaju. Bitan je redosled množenja matrica!
(e) Ako su A i B kvadratne matrice onda $(AB)^2 = A^2B^2$.
NE. $(AB)^2 = AB \cdot AB \neq AABB$ u opštem slucaju. Bitan redosled množenja matrica!

3. Ako za članove redova $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n$ važi $0 \leq a_n \leq b_n$ i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n$ konvergira onda konvergira i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$. Dokazati.

Rešenje: strana 5:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_05.pdf`

4. Formulisati uslove koji moraju da budu ispunjeni kako bi važilo $\int\limits_{x_1}^{x_2}(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x))dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_k(x)dx$.

Resenje: slajd 15:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcionalni%20nizovi%20i%20redovi.pdf`

5. Navesti definiciju parcijalnog izvoda funkcije $f(x_1, ..., x_5)$ u tački $A(a_1, ..., a_5)$ po promenljivoj x_3.

Rešenje: slajd 17:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcije%20vise%20promenljivih%20-%20parcijalni%20iz`

Umesto tačke $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ je tačka $A(a_1, ..., a_5)$ i umesto vektora e_k je e_3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_3} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{A} + h\mathbf{e}_3) - f(\mathbf{A})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3 + h, a_4, a_5) - f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{h}.\end{aligned}$$

6. Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Funkcija f može imati ekstremume u tačkama u kojima ne postoje parcijalni izvodi.
DA. Slajd 3 i 4:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcije%20vise%20promenljivih%20-%20Ekstremumi.pdf`

Kandidati za ekstreme su kritične tačke (stacionarne gde su parcijalni izvodi =0 i singularne gde ne postoje parcijalni izvodi). (kupa "naopačke").

(b) Ako je $\mathbf{x}_0$ singularna tačka funkcije f, onda u $\mathbf{x}_0$ ne može postojati lokalni ekstremum.
NE. (isti slajdovi kao i za pod a)). Singularne tačke su kandidati za ekstremume.

(c) Ako je $\mathbf{x}_0$ stacionarna tačka funkcije f onda je $\mathbf{x}_0$ i ekstremum funkcije f.
NE. Stacionarna tečka je kandidat za ekstremum, ali može biti i sedlasta. Strana 1:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_12.pdf`

(d) Da bi postojali svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u nekoj tački, potrebno je i dovoljno da funkcija bude neprekidna u toj tački.
NE. Strana 5:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_11.pdf`

(e) Ako je funkcija f neprekidna u nekoj tački onda je ona i diferencijabilna u toj tački.
NE. Strana 7:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_11.pdf`

Prva teorema. Obrnuto ne mora da važi.

MATEMATIKA 2 - TEORIJA G2 - Kolokvijum1 2021/22.

Ime i prezime:______________________________
Broj indeksa: ______________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

1. Odrediti parametar $k \in \mathbb{R}$ tako da vektor $(k, 2, 11)$ bude linearna kombinacija vektora $(-1, 0, 1)$ i $(2, 1, 4)$.

Rešenje: Analogno kao i u grupi 1: $\alpha(-1, 0, 1) + \beta(2, 1, 4) = (k, 2, 11) \Rightarrow k = 1$.

2. Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Ako su A i B kvadratne matrice onda $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
NE. Na primer: $\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1$, $\det(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) = 4$
$\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) = 9 \neq 1 + 4$

(b) Ako je AB kvadratna matrica onda i matrice A i B moraju biti kvadratne.
NE. Na primer ako je A dimenzije 3x4 i B dimenzije 4x3 onda je proizvod AB definisan i rezultat je matrica dimenzije 3x3 (kvadratna).

(c) Ako su A i B invertibilne matrice onda $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A + B$.
NE.

(d) Ako su A i B kvadratne matrice i ako je A invertibilna onda je $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.
DA. $\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1}) \det(B) \det(A) = \frac{1}{\det(A)} \det(B) \det(A) =$(ovo su sada BROJEVI) $= \frac{1}{\det(A)} \det(A) \det(B) = \det(B)$.

(e) Ako su A i B kvadratne matrice onda $(AB)^2 = B^2A^2$.
NE. $(AB)^2 = AB \cdot AB \neq BBAA$ u opštem slucaju. Bitan redosled množenja matrica!

3. Ako za članove redova $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n$ važi $0 \leq a_n \leq b_n$ i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ divergira onda divergira i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$. Dokazati.

Rešenje: strana 5:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_05.pdf`

4. Formulisati uslove koji moraju da budu ispunjeni kako bi važilo $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x))' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.
Resenje: slajd 15:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcionalni%20nizovi%20i%20redovi.pdf`

5. Navesti definiciju parcijalnog izvoda funkcije $f(x_1, ..., x_4)$ u tački $B(b_1, ..., b_4)$ po promenljivoj x_2.

Rešenje: slajd 17:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcije%20vise%20promenljivih%20-%20parcijalni%20iz`

Umesto tačke $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ je tačka $B(b_1, ..., a_4)$ i umesto vektora e_k je e_2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial x_2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{B} + h\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{B})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(b_1, b_2 + h, b_3, b_4) - f(b_1, b_2, b_3, b_4)}{h}.\end{aligned}$$

6. Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna.

(a) Funkcija f ne može imati ekstremume u tačkama u kojima ne postoje parcijalni izvodi.
NE. Slajd 3 i 4:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/Funkcije%20vise%20promenljivih%20-%20Ekstremumi.pdf`

Kandidati za ekstreme su kritične tačke (stacionarne gde su parcijalni izvodi =0 i singularne gde ne postoje parcijalni izvodi). (kupa "naopačke").

(b) Ako je $\mathbf{x}_0$ singularna tačka funkcije f, onda u $\mathbf{x}_0$ ne može postojati lokalni ekstremum.
NE (isto kao i u grupi 1)

(c) Ako je $\mathbf{x}_0$ stacionarna tačka funkcije f onda je $\mathbf{x}_0$ i ekstremum funkcije f.
NE (isto kao i u G1)

(d) Da bi postojali svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u nekoj tački, potrebno je i dovoljno da funkcija bude neprekidna u toj tački.
NE. (isto kao i u grupi 1)

(e) Ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački onda je ona i neprekidna u toj tački.
DA. Strana 7:

`http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/MAT2/mat2_11.pdf`

Prva teorema.