MATEMATIKA 2 - TEORIJA G1 - 1.12.2018.

Ime i prezime:______________________________

Broj indeksa: ______________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

1. (1p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako vektor $x \in V$, gde je V vektorski prostor, onda i vektor $(-x) \in V$.

(b) Ako je W vektorski podprostor od V, onda za svaki vektor $x \in V$ važi da $\lambda x \in W$, gde je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Vektori $x = [-1, 2, -3]$ i $y = [2, -4, 6]$ su linearno nezavisni.

(d) Neka je $S = \{v_1, ..., v_k\}$ pokrivač vektorskog prostora V. Tada je S linearno nezavistan skup.

(e) Neka je $B = \{v_1, ..., v_k\}$ baza vektorskog prostora V. Tada se svi vektori iz V mogu zapisati kao linearna kombinacija vektora iz B.

Resenje: (a), (e)

2. (1.5p.) Ako su A, B i C invertibilne matrice dimenzija 2×2 takve da je $\det(A) = 2, \det(B) = 3$ i $\det(C) = 4$, odrediti $\det(2A^T B^2 C^{-1})$.

Resenje:

$\det(2A^T B^2 C^{-1}) = 2^2 \cdot \det(A^T) \cdot \det(B^2) \cdot \det(C^{-1}) = 4 \cdot \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(C)} = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 18.$

3. (1.5p.) Koji uslov mora da bude ispunjen da bi za kvadratne matrice A, B i C važilo tvrđenje $AC = BC \Rightarrow A = B$? Dokazati.

Rešenje:

Matrica C mora biti invertibilna.

$AC = BC$ pomnozimo sa desne strane sa C^{-1}: $ACC^{-1} = BCC^{-1} \Rightarrow AI = BI \Rightarrow A = B$.

4. (1.5p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira.

(b) Brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$, gde je $r_m = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$.

(c) Ako za članove brojnih redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ takvih da $a_n, b_n > 0$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ važi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(d) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} a_n,\ \ a_n > 0$ je konvergentan ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka graničnoj funkciji $f(x)$ na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$ ako $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon, x))(\forall x \in D):\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(f) Ako je funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na (a, b) onda je on i konvergentan na (a, b).

Rešenje: (b), (d), (f)

5. (1.5p.) Neka stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-4)^n a_n,\ a_n \in \mathbb{R}$ konvergira za $x = 2$ i divergira za $x = 9$. Za svaku od narednih tačaka zapisati da li red konvergira, divergira ili ne postoji dovoljno informacija da bi se utvrdila konvergencija.

(a) $x = -2$ D

(b) $x = 0$?

(c) $x = 3$ K

(d) $x = 4$ K

(e) $x = 10$ D

6. (1.5p) Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^5$. Navesti definiciju parcijalnog izvoda funkcije f po promenljivoj x_3 u tački $A(a_1, ..., a_5)$.

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3 + h, a_4, a_5) - f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{h}$$

7. (1.5p.) Definisati Hesijan funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u tački A.

MATEMATIKA 2 - TEORIJA G2 - 1.12.2018.

Ime i prezime:______________________________
Broj indeksa: ______________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

1. (1p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako vektor $x \in V$, gde je V vektorski prostor, onda je i $\lambda x \in V$, gde je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Ako je W vektorski podprostor od V, onda za sve vektore $x, y \in V$ važi da $x + y \in W$.

(c) Vektori $x = [0, 1, -2]$ i $y = [1, -2, 0]$ su linearno zavisni.

(d) Neka je $S = \{v_1, ..., v_k\}$ pokrivač vektorskog prostora V. Tada se svi vektori iz V mogu zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.

(e) Neka je $B = \{v_1, ..., v_k\}$ baza vektorskog prostora V. Tada je B linearno zavistan skup.

Rešnje: (a), (d)

2. (1.5p.) Ako su A, B i C invertibilne matrice dimenzija 3×3 takve da je $\det(A) = 4, \det(B) = 3$ i $\det(C) = 2$, odrediti $\det(3A^T B^{-1} C^2)$.

Rešenje:
$\det(3A^T B^{-1} C^2) = 3^2 \cdot \det(A^T) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(C^2) = 9 \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(C) \cdot \det(C) = 9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 48.$

3. (1.5p.) Koji uslov mora da bude ispunjen da bi za kvadratne matrice A, B i C važilo tvrđenje $CA = CB \Rightarrow A = B$? Dokazati.

Rešenje:
Matrica C mora biti invertibilna.
$CA = CB$ pomnozimo sa leve strane sa C^{-1}: $C^{-1}CA = C^{-1}CB \Rightarrow IA = IB \Rightarrow A = B$.

4. (1.5p.) Zaokružiti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Ako je $r_m = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ i $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$ onda brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(c) Ako za članove brojnih redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ takvih da $a_n, b_n > 0$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ važi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

(d) Red sa proizvoljnim članovima $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je apsolutno konvergentan ako je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(f) Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na (a, b) ako niz parcijalnih suma $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u bar jednoj tački intervala (a, b).

(f) Ako je funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na (a, b) onda je on i konvergentan na (a, b).

Rešenje: (b), (d), (f)

5. (1.5p.) Neka stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+4)^n a_n,\ a_n \in \mathbb{R}$ konvergira za $x = -2$ i divergira za $x = -9$. Za svaku od narednih tačaka zapisati da li red konvergira, divergira ili ne postoji dovoljno informacija da bi se utvrdila konvergencija.

(a) $x = -8$?

(b) $x = -5$ K

(c) $x = -3$ K

(d) $x = 0$?

(e) $x = 4$ D

6. (1.5p) Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^4$. Navesti definiciju parcijalnog izvoda funkcije f po promenljivoj x_4 u tački $A(a_1, ..., a_4)$.

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_4} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,a_3,a_4+h)-f(a_1,a_2,a_3,a_4)}{h}$$

7. (1.5p.) Definisati Jakovijevu matricu funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u tački A.