MATEMATIKA 2 - TEORIJA G1 - 3.12.2016.

Ime i prezime:______________________________

Broj indeksa: ______________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

1. (1p.) Koristeći Moavrovu formulu izračunati z^6 gde je $z = \frac{1}{2}(\cos(15°) + i\sin(15°))$.

Rešenje: $z^6 = \frac{1}{2^6}(\cos(6 \cdot 15^o) + i \cdot \sin(6 \cdot 15^o)) = \frac{i}{64}$

2. (2p.) Skup $S = \{v_1, ..., v_n\}, n \geq 2$ je linearno zavistan ako se bar jedan vektor v_i može zapisati kao linearna kombinacija drugih vektora iz S. Dokazati.

Rešenje:

Ako je S linearno zavistan $\Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule takvi da $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

Pretpostavimo da $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - ... - \alpha_n v_n \Rightarrow v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \Rightarrow v_1$ je linearna kombinacija vektora $v_2, ..., v_n$ što je kontradikcija.

3. (1p.) Ako su A i B invertibilne matrice dimenzija 4×4 takve da $\det(A) = 2$ i $\det(B) = 3$, odrediti $\det(2A^{-1}B^T)$.

Rešenje: $\det(2A^{-1}B^T) = 2^4 \det(A^{-1}) \det(B^T) = 16 \cdot \frac{1}{\det(A)} \det(B) = 24$

4. (1.5p.) Neka su A i B matrice dimenzija $n \times n$. Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) $15A = 5A + 10A$

(b) $5AB = 5BA$

(c) $(2A + 3B)^T = \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{3}B^T$

(d) $(3B^T \cdot 2A^T)^T = 6BA$

(e) $(3A^T)^{-1} = \frac{1}{3}(A^{-1})^T$

(f) $(A^{-1}B^{-1})^{-1} = AB$

Rešenje: tačni odgovori su pod (a) i (e).

5. (1p.) Odrediti prva četiri člana (zaključno sa trećim izvodom) razvoja funkcije $f(x) = x\sin(2x)$ u Tejlorov red u okolini tačke $x = 0$.

Rešenje:
$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$
$f(0) = 0$
$f'(x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x) \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = 4\cos(2x) - 4x\sin(2x) \Rightarrow f''(0) = 4$
$f'''(x) = -12\sin(2x) - 8x\cos(2x) \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f(x) = 0 + 0 + \frac{4x^2}{2} + 0 = 2x^2$

6. (1.5p) Neka su $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ beskonačni realni redovi. Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Ako $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\sum_{i=10}^{\infty} a_n$ konvergira.

(c) Ako $\sum_{i=10}^{\infty} a_n$ divergira, onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira.

(d) Ako $a_n > b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(e) Ako je $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Rešenje: tačni su (a), (b) i (c).

7. (1p.) Neka stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty}(x-5)^n a_n$, $a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...$ konvergira za $x = 2$ i divergira za $x = 11$. Za svaku od narednih tačaka zapisati da li red konvergira, divergira ili ne postoji dovoljno informacija da bi se utvrdila konvergencija:
(a) $x = -5$ divergira
(b) $x = 0$?
(c) $x = 1$?
(d) $x = 2.5$ konvergira
(e) $x = 7$ konvergira
(f) $x = 9.5$?
(g) $x = 12$ divergira

8. (1p.) Navesti definiciju izvoda funkcije $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ u tački A u pravcu vektora $\vec{a}$.

Rešenje: Neka $f : E \to R, E \subseteq R^n, \vec{a} \neq 0$. Granična vrednost $f'_{\vec{a}}(A) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(A+t\vec{a})-f(A)}{t}$ ukoliko postoji, zove se izvodom funkcije f u tački A u pravcu vektora $\vec{a}$.

MATEMATIKA 2 - TEORIJA G2 - 3.12.2016.

Ime i prezime:____________________________

Broj indeksa: ____________________________

Broj poena:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

1. (1p.) Koristeći Moavrovu formulu izračunati z^3 gde je $z = \frac{1}{3}(\cos(30°) + i\sin(30°))$.

Rešenje: $z^3 = \frac{1}{3^3}(\cos(3 \cdot 30^o) + i \cdot \sin(3 \cdot 30^o)) = \frac{i}{27}$

2. (2p.) Neka je dat skup $S = \{v_1, ..., v_n\}, n \geq 2$. Ako se bar jedan vektor v_i može zapisati kao linearna kombinacija drugih vektora iz S onda je S linearno zavistan. Dokazati.

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da $v_1 \in S$ je linearna kombinacija vektora $v_2, ..., v_n \Rightarrow v_1 = \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \Rightarrow -v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1 \neq 0$ tj. postoji bar jedan koeficijent koji je različit od nule $\Rightarrow S$ je linearno zavistan, sto je konbtradikcija.

3. (1p.) Ako su A i B matrice dimenzija 4×4 takve da $\det(A) = 2$ i $\det(B) = 3$, odrediti $\det(3A^T B^{-1})$.

Rešenje: $\det(3A^T B^{-1}) = 3^4 \det(A^T) \det(B^{-1}) = 3^4 \det(A) \frac{1}{\det(B)} = 54$.

4. (1.5p.) Neka su A, B i C matrice dimenzija $n \times n$. Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) $10A = 2A \cdot 5A$

(b) $C \cdot (3A + 2B) = 3AC + 2BC$

(c) $(3A + 2B)^T = 3A^T + 2B^T$

(d) $(2A \cdot 3B)^T = 6A^T B^T$

(e) $(2A^{-1})^T = (2A^T)^{-1}$

(f) $(A^{-1}B^{-1})^{-1} = BA$

Rešenje: tačni su (c) i (f).

5. (1p.) Odrediti prva četiri člana (zaključno sa trećim izvodom) razvoja funkcije $f(x) = \sin(-x^2)$ u Tejlorov red u okolini tačke $x = 0$.

Rešenje:
$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$
$f(0) = 0$
$f'(x) = -2x\cos(-x^2) \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = -2\cos(-x^2) + 4x^2\sin(-x^2) \Rightarrow f''(0) = -2$
$f'''(x) = 4x\sin(-x^2) - 8x^3\cos(-x^2) \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f(x) = 0 + 0 + \frac{-2x^2}{2} + 0 = -x^2$

6. (1.5p.) Neka su $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ beskonačni realni redovi. Zaokruziti **sva** tvrđenja koja su tačna:

(a) Ako $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(b) Ako $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\sum_{i=15}^{\infty} a_n$ konvergira.

(c) Ako $\sum_{i=15}^{\infty} a_n$ divergira, onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira.

(d) Ako $a_n > b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ divergira, onda i $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira.

(e) Ako je $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Rešenje: tačni su (b),(c) i (d).

7. (1p.) Neka stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n a_n$, $a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...$ konvergira za $x = 1$ i divergira za $x = 9$. Za svaku od narednih tačaka zapisati da li red konvergira, divergira ili ne postoji dovoljno informacija da bi se utvrdila konvergencija:
(a) $x = -4$ divergira
(b) $x = 0$?
(c) $x = 2.5$ konvergira
(d) $x = 6.5$ konvergira
(e) $x = 7.5$?
(f) $x = 8$?
(g) $x = 10$ divergira

8. (1p.) Navesti definiciju parcijalnog izvoda funkcije $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ po promenljivoj x_l u tački A.

Rešenje: Neka $f : E \to R, E \subseteq R^n, A \in E$ i e_l je l-ti vektor standardne baze u R^n. Ukoliko postoji izvod u pravcu $D_{e_l}f(A)$ zovemo ga parcijalnim izvodom funkcije f po promenljivoj x_l u tački $A = (a_1, ..., a_n)$, tj. $D_{e_l}f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_l} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a_1,...,a_{l-1},a_l+h,a_{l+1},...,a_n)-f(A)}{h}$.