Redovi

October 16, 2019

Redovi realnih brojeva

- Neka je $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ **niz realnih brojeva**, u oznaci $\{a_n\}$.
- Suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...$ naziva se (**beskonačnim) realnim redom** sa opštim članom a_n.
- Zbirovi:
  $S_1 = a_1$
  $S_2 = a_1 + a_2$
  ....
  $S_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
  nazivaju se **parcijalnim sumama reda**.

Definicija

Ako postoji konačan limes niza parcijalnih suma reda tj. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *onda se kaže da taj red* ***konvergira*** *i da mu je zbir* S *tj.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Za red koji ne konvergira kaže se da ***divergira*** *(ili ne postoji limes ili određeno divergira ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$*).*

Teorema

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n,\ c \in \mathbb{R}$.
Pri tom važi $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokaz na času.

Teorema

Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergiraju, onda konvergira i njihov zbir* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.
Pri tom važi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz na času.

Teorema

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz na času.

Obrnuto ne važi!

Definicija

Ostatak reda *je* $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots.$

Očigledno je da: $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n = a_1 + \ldots + a_m \Rightarrow r_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - S_m.$

Teorema

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ $(m > 2)$ *su istovremeno konvergentni ili divergentni.*

Dokaz na času.

Teorema

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira akko* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0.$

Dokaz na času.

Kriterijumi za konvergenciju realnih redova sa pozitivnim članovima ($a_n > 0$)

Teorema

Poredbeni kriterijum

Neka za članove redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa pozitivnim članovima važi* $0 \leq a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Tada:*

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, onda divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz na času.

Teorema

Poredbeni kriterijum 2

Neka za članove redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa pozitivnim članovima važi* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Tada:*

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, onda divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz na času.

Teorema

Košijev kriterijum

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa pozitivnim članovima i neka postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *.*
Tada:

1. *Ako* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
2. *Ako* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Teorema

Dalamberov kriterijum

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa pozitivnim članovima i neka postoji* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *.*
Tada:

1. *Ako* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
2. *Ako* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Napomena: Košijev i Dalamberov kriterijum ne obuhvataju slučaj kada su navedeni limesi jednaki 1, jer u tim slučajevima red može da bude i konvergentan i divergentan.

Alternativni redovi

Definicija

Red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...,\ a_n > 0$ *(članovi naizmenično menjaju znak) zove se* ***alternativni (alternirajući) red****.*

Kriterijumi konvergencije za redove sa pozitivnim članovima ne važe i za alternativne redove.

Teorema

Lajbnicov kriterijum

Alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ a_n > 0$ *je konvergentan ako je niz* $\{a_n\}$ *nerastući i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz na času.

Redovi sa proizvoljnim članovima

Redovi sa proizvoljnim članovima su oni redovi čiji članovi menjaju znak ali bez neke pravilnosti.

Alternativni redovi su specijalni slučaj redova sa proizvoljnim članovima.

Kod redova sa proizvoljnim članovima razlikujemo dve vrste konvergencije: apsolutnu i uslovnu.

Definicija

Red sa proizvoljnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***apsolutno konvergira*** *ako konvergira pozitivan red* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu da se koriste svi kriterijumi kao i za redove sa pozivitnim članovima za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teorema

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, onda je on i konvergentan.

Obrnuto ne mora da važi.