

Integracija

November 19, 2020

Dvostruki integral nad pravougaonikom

Neka je dat pravougaonik

$$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Neka su $[a, b]$ i $[c, d]$ izdeljeni na sledeći način:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Pravougaonik A je izdeljen na $m \cdot n$ pravougaonika oblika:

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}, \\ i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Označimo **podelu** pravougaonika A sa:

$$\mathcal{P}_{[a,b] \times [c,d]} = \{A_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Neka je dužina i -tog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ označena sa Δx_i .
Neka je dužina j -tog intervala $[y_{j-1}, y_j]$ označena sa Δy_j .

Površina pravougaonika A_{ij} jednaka je: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Rimanova integralna suma funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ za podelu \mathcal{P} je:

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j, (x_i^*, y_j^*) \in A_{ij}.$$

Neka je $\|P\|$ dužina dijagonale pravougaonika P_{ij} .

Kada $\|P\| \rightarrow 0$ podela \mathcal{P} je sve finija (više manjih pravougaonika sa manjim dijagonalama).

Definicija

Dvostruki (dvojni) integral funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nad pravougaonikom A je $\int \int_A f(x, y) dx dy = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P})$.

Ako ovaj limes postoji onda se kaže da je f **integrabilna** na A .

Trostruki integral nad kvadrom

Neka je dat kvadar

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Neka su $[a, b]$, $[c, d]$ i $[e, f]$ izdeljeni na sledeći način:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

$$e = z_0 < z_1 < \dots < z_s = f$$

Kvadar A je izdeljen na $m \cdot n \cdot s$ kvadara oblika:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &= \{(x, y, z) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \\ &i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Označimo **podelu** kvadra A sa:

$$\mathcal{P}_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} = \{A_{ijk} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s\}.$$

Neka je dužina i -tog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ označena sa Δx_i .

Neka je dužina j -tog intervala $[y_{j-1}, y_j]$ označena sa Δy_j

Neka je dužina k -tog intervala $[z_{k-1}, z_k]$ označena sa Δz_k .

Zapremina kvadra A_{ijk} jednaka je: $\Delta A_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

Rimanova integralna suma funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ za podelu \mathcal{P} je:

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k, (x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in A_{ijk}.$$

Neka je $\|P\|$ dužina dijagonale kvadra P_{ijk} .

Kada $\|P\| \rightarrow 0$ podela \mathcal{P} je sve finija (više manjih kvadara sa manjim dijagonalama).

Definicija

Trostruki (trojni) integral funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ nad kvadrom A je $\int \int \int_A f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P})$.

n -tostruki integral nad pravuglim n -paralelopipedom

Neka je dat pravougli n -paralelopiped

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

(Analognim postupkom)....

Definicija

n -tostruki integral funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nad n -paralelopipedom

$$A \text{ je } \overbrace{\int \dots \int}_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}).$$

Egzistencija

Neka je A segment iz \mathbb{R}^n i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema

Ako je f integrabilna na A onda je ona ograničena na A .

Teorema

Ako je f neprekidna na A onda je ona integrabilna na A .

Teorema

Ako je f integrabilna na A i ako je B podsegment od A ($B \subseteq A$) onda je f integrabilna i na B .

Svojstva

Teorema

Neka je A segment iz \mathbb{R}^n i $A = \bigcup_{i=1}^p A_i$ jedna podela segmenta A . Ako je $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na svakom podsegmentu A_i , $i = 1, \dots, p$, onda

je ona integrabilna i na A i važi:

$$\int \dots \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \int \dots \int_{A_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Teorema

Neka je A segment iz \mathbb{R}^n i neka su $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilne na A .
Tada:

- Funkcija $\lambda \cdot f$, $\lambda \in \mathbb{R}$ je integrabilna na A i važi:
$$\int_A \lambda f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$
- Funkcija $f \pm g$ je integrabilna na A i važi:
$$\int_A (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \pm \int_A g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$
- Ako je $f(\mathbf{x}) \geq 0$ na A onda je $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0$.
- Ako je $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ za svako $\mathbf{x} \in A$ onda je $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_A g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.
- Funkcija $|f(\mathbf{x})|$ je integrabilna na A i važi: $|\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}| \leq \int_A |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$.

Teorema

Fubinijeva teorema (za funkciju dve promenlive)

Neka je $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [a, b] \times [c, d]$ neprekidna funkcija. Onda je:

$$\int_A \int f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Napomena (zapis): $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$

Teorema

Fubinijeva teorema (za funkciju tri promenlive)

Neka je $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ neprekidna funkcija.

Onda je:

$$\int_A \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx = \dots (\text{postoji 6 redosleda integracije}).$$