ИСТОРИЈА И ФИЛОЗОФИЈА МАТЕМАТИКЕ

Зоран Петровић

25. фебруар 2022.

О курсу:
12-13 недеља
Материјал на мојој страници

О испиту:
Јединствен писмени испит
180 минута
4–12 питања
125 поена
51-60 поена – оцена 6
61-70 поена – оцена 7
71-80 поена – оцена 8
81-90 поена – оцена 9
91-125 поена – оцена 10.

Праисторија

Антрополози нам кажу да нема културе, ма колико примитивна била, која нема у себи неко поимање броја. Наведимо неке примере.

- Нека абориџинска племена у Аустралији немају речи за бројеве веће од 2, имају само за 1 и 2, све остало је „много”.
- Индијанци око Амазона броје до 6, но немају речи за 3, 4, 5, 6, него је 3 два-један, 4 је два-два итд.
- Бушмани слично броје по 2 до 10. Овде је занимљиво истаћи да не желе да замене 2 краве за 4 свиње, али је у реду да замене једну краву за две свиње, а потом опет исто то!

Веома је занимљива анализа бројевних система код северноамеричких Индијанаца коју је 1913. године објавио Илс. Пре свега, наводи се да има 60 језичких група, а укупно око 750 језика. Нису сви различити, сматра се да има око 500 различитих језика. У оквиру исте језичке групе су језици који су слични као што су слични, на пример, шпански, италијански и француски. За 307 бројевних система базираних на анализи језика, имамо следеће податке:

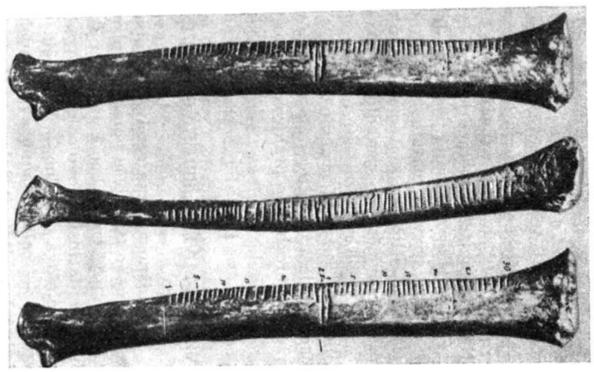
- 146 имају основу 10;
- 106 користе комбинацију основе 5 и 10;
- 35 користе комбинацију основе 5 и 20;
- 15 користе основу 4;
- 3 користе основу 3;
- 1 користи основу 8.

Не постоји чисто бинарни систем, али се трагови бинарног система налазе у 81 језику, где се појављује „дуплирање” – на пример 6 се изражава као 2×3, „поново 3”, „3, 3”, „тројке” и слично за 4, 8, 10 и 12. Сматра се да је то последица постојања великог броја природних парова (очију, шака, крила...).

Једна занимљивост – на Навахо језику се број 10 изговара: „незна”.

За регистровање броја неких ствари, плодова, животиња коришћено је урезивање у камен, дрво, прављење чорова на нитима различите боје или дужине. Ако би били превелики бројеви за запис, онда би се зарези груписали у групе од по 5, 10, 20. То је значајно побољшање од бројања један по један.

Остаци костију показују да су такав начин записивања изумели људи у Старом каменом добу чак и пре 30 хиљада година. Посебно значајан пример је голењача младог вука нађена у Чехословачкој тридесетих година прошлог века. Она је дуга око 18 цм и има 55 дубока зареза који су мање-више исте дужине, а груписани су у групе од 5 зареза.



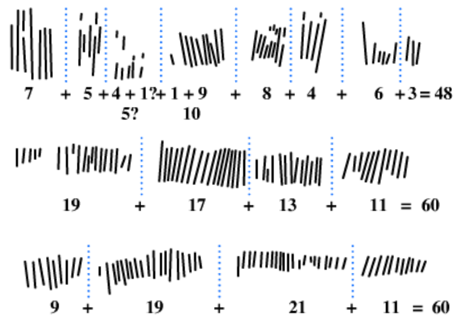
Слика 1: Кост из Старог каменог доба

Дуго се сматрало да су такви зарези записи из лова, али скорија разматрања су више склона интерпретацији да је ту било речи и о неком записивању о протоку времена. Обележавања на костима нађеним у неким француским пећинама крајем осамдесетих година XIX века су груписана у низове бројева који се понављају и који се слажу са бројем дана у узастопним Месечевим фазама. Тако да ту као да имамо неки лунарни календар.

Један изузетан примерак нађен је 1960. године у Ишангу дуж обала Језера Едвард, близу изворишта Нила. Процењено је да се ради о налазишту старом око 19 хиљада година, што је неких 12 хиљада година пре појављивања првих пољопривредних заједница у долини Нила. Ради се о лишњачи бабуна, која је највероватније служила као ручка неког оруђа, које се користило за урезивање, тетовирање, или чак и за писање на неки начин. Садржи групе зареза које су груписане у три јасно дефинисане колоне. Не чини се да се ради о декоративном начину груписања, због своје неправилности. Наиме, једна од колона садржи групе од 11, 21, 19 и 9 зареза, што подсећа на $10+1, 20+1, 20-1, 10-1$. У другој колони има шест група од по (редом): 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3 зареза. Као да овде има речи о неком удвостручавању (али, чему онда ту и 7?).

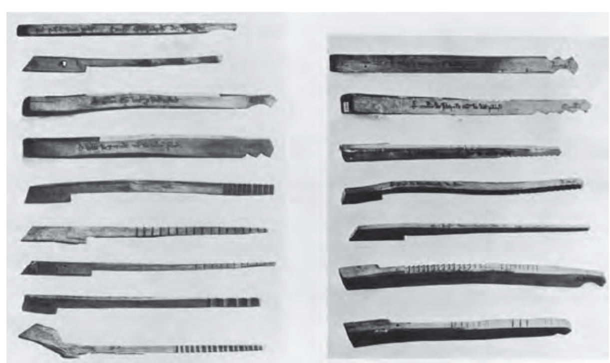
Последња колона има групе од по 11, 13, 17 и 19 зареза. Тешко да се овде, као што неки наводе, ради о простим бројевима. Више се чини да је и овде реч о неком календару пошто је $11+21+19+9 = 60 = 11+13+17+19$.

Урезивање као метод за регистровање података, дуго је задржан.



Слика 2: Зарези на кости из Ишанга

Следећи пример је занимљив. У Британији су се у дашчице од лешниковог дрвета дужине од 15 до 23 цм правили зарези као записи о новцу. Зарез који је био дебљине шаке, одговарао је износу од 1000 фунти, дебљине палца – 100 фунти, а дебљине малог прсте – 20 фунти. Када би се давао зајам, дашчица би се преломила на пола тако да се видео зарез на свакој половини. Један део би задржао државни трезор, а други би узео дужник. Тако би се лако могло проверити поређењем дашчица да ли се рачуни „слажу”.



Слика 3: Дашчице из тринаестог века

Занимљива је терминологија. Уколико би неко позајмио новац енглеској националној банци, он би узимао половину те дашчице и тај део који би он узео називао се „stock”. Дакле, он је био „stockholder”. Када би он желео да уновчи то што је имао, донео би свој део дашчице и онда би се то проверило – „check”. Одатле су казније изведени називи за „акције” и „чекове”. Тај систем је укинут тек 1826. године. Године 1834. када су силне дашчице које су још преостале спаљене у пећима које су подгревале Кућу лордова, ватра је измакла контроли и проширила се толико да је изгорела цела зграда парламента.

Други начин записивања налазимо код Инка у Перуу. Постојао је прилично добро разрађен систем „кипуа” („чворова који говоре”).

Слика 4: Кипу

То су биле групе врпци направљених од уплетених влакана од вуне или длаке животиња из породице камелида (на пример, ту спада лама), различите боје и дужине са више чворова на њима. Инке нису имали писмо, кипуи су чували разне податке. Наравно, и не знамо у потпуности које су све податке, сем чисто нумеричких (подаци о складиштима, броју људи и слично), чували на тај начин, али је занимљиво да се тако неки логичко-нумерички систем могао развити у култури која није имала писмо. Кипуи су садржали од 3 до скоро 1000 ниски. Нажалост, шпански освајачи су сматрали да су ти чудни записи ђавољи производ и скоро су сви уништени, остало је само око 600 кипуа. До скора се сматрало да они потичу од 650. г. п. н. е. али је 2005. године у обалском граду Каралу у Перуу откривен кипу, можда је боље рећи прото-кипу, стар 5000 година и то у добром стању. У почаст старих кипуа, неки компјутерски системи за чување података називају се Quipu.

Египат

Груписањем мањих пољопривредних заједница у периоду од 3500. до 3100. г. п. н. е. формирана су два краљевства – Горњи и Доњи Египат. Око 3100. г. п. н. е. освајањем са југа дошло је до уједињења.

Класичан извор сазнања о Египту је Херодотова „Историја”. Херодот (485-430. г. п. н. е.) је рођен у Халикарнасу у југозападном делу Мале Азије. То је био грчки град у саставу Персије. Данас је то Бодрум у Турској.

Због политичких разлога, био је присиљен да напусти родно место и сместио се у Атини. Одатле је путовао, можда као трговац, у разне крајеве тада познатог света, од јужних делова садашње Русије, преко Сирије и Ирака до Египта. Он је записивао приче које су му људи причали, тако да је његова „Историја” више путопис са социолошким и антрополошким подацима него историја у садашњем смислу. Али, он је покушавао да садашњост тумачи прошлим догађајима и то је један од разлога што је прозван „Оцем историје”.

Модерно интересовање за Египат почиње неуспешном Наполеоновом војном авантуром у Египту. Наиме, Наполеон је 1798. године са нешто више од 300 бродова и 38000 војника кренуо у Египат у покушају да га освоји и на тај начин угрози британски пут за Индију. Но, већи део флоте је убрзо уништен код Александрије, мада је војна кампања трајала још годину дана. Наполеон је, желећи да ублажи војну акцију и да промовише француску културу, у ту експедицију уврстио и многе научнике, између осталих и француске математичаре Гаспара Монжа и Жан Баптист Фуријеа. Научници су имали задатак да прикупе што више информација о свим аспектима територије земље у коју су дошли. Они су у току војних сукоба заробљени, али су пуштени са свим својим записима и цртежима. Захваљујући тим материјалима, у току наредних 25 година, објављено је монументално дело „Опис Египта”.

Никада до тада није нека ваневропска земља била приказана са толико много података, који су сакупљени брзо и квалитетно, а при веома тешким условима. До тада је у Европи стари Египат био непознат, но овим делом је почело велико интересовање у европским интелектуалним круговима за Египат као древну цивилизацију.

Као што знамо, писмо које се користило за значајне натписе било је хијероглифско („свети знаци”) које је у самом свом почетку било сликовно, но касније су додавани и појединачни симболи. У следећој таблици можемо видети приказ бројева, заједно са описом симбола

број	хијероглиф	опис
1	𓏺	палица
10	𓎆	кост пете
100	𓍢	уже
1000	𓆼	цвет локвања
10000	𓂭	савијени прст
100000	𓆐	пуноглавац
1000000	𓁨	Хех, бог вечности

У неким приказима је уже умотано у другом смеру, прст је савијен на другу страну, а уместо пуноглавца, појављује се жаба.

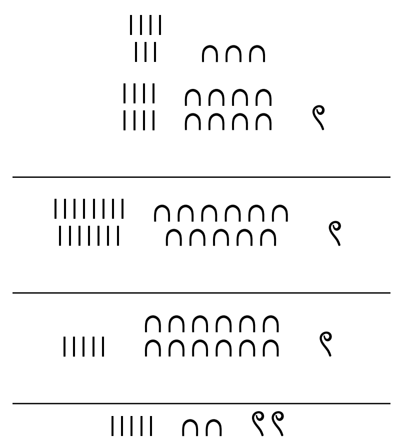
Као што можемо видети, систем јесте базиран на основи десет, али није позициони пошто су се различити симболи користили да означе разне декадне јединице (немамо цифре). Бројеви су приказивани тако што би се низали симболи за поједине декадне јединице и то би, обично, здесна долазиле ознаке за веће јединице, но, с обзиром да систем није позициони, то није било обавезно. На пример, 2019 би се могло записати овако:

𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 𓎆 𓆼𓆼

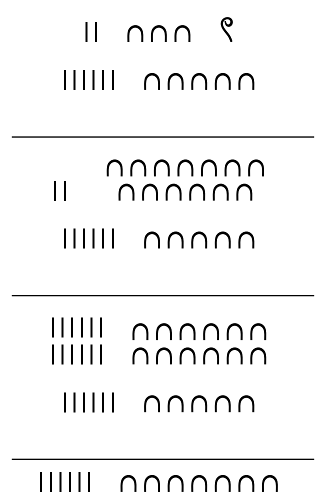
Но, због уштеде простора, некад би се низали и један изнад другог.

𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
𓏺𓏺𓏺𓏺 𓎆 𓆼𓆼

Сабирање се вршило груписањем и потоњим сређивањем. На пример, ако бисмо желели да нађемо збир $37 + 188$, то бисмо радили овако:



Одузимање се изводи уз „позајмљивање”. На пример, одузимање 132 − 56 би се изводило као што следи.



Као што знамо, многи записи су пронађени на папирусима на којима се писало пером и мастилом. У сврху лакшег писања на папирусу, египатски свештеници су развили *хијератско* (*свето*) писмо. Могло би се рећи да се оно према хијероглифском односи као писани текст према штампаном. Касније, када се употреба папируса проширила, развијено је и *демотско* (народно) писмо.

Француски војници су, приликом једног укопавања у близини Розете, открили значајан камен на којима се налазио натпис на три писма —

хијероглифском, демотском, грчком. Димензије камена су: $1123 \times 757 \times 284$ милиметра.

Било је јасно да се ради о изванредно важном открићу пошто нико до тада није био у стању да прочита хијероглифске натписе. Стога су начињене копије помоћу папира и мастила, које су разаслане по Европи. Не само то, него су при преговорима о капитулацији француских снага у Египту, Британци у уговор ставили и захтев за предају *камена из Розете*. Он је тада пребачен у Британски музеј, а гипсане копије су дате водећим британским универзитетима – Оксфорд, Кебриџ, Даблин и Единбург.

Хијероглифе је на крају ипак дешифровао један Француз – Шамполион (1790–1832.) који је цео свој, не баш дуги живот, посветио томе још од детињства.

Главни извори нашег знања о египатској математици потичу од два папируса – Рајндовог (или Ахмесовог, по имену писара који га је исписао) и Московског (или Голенишевљевог). Осим ових, од мањег значаја су и Берлински папирус, као и *египатска математичка кожна ролна.*

Ахмесов папирус је открио Шкот Рајнд 1858. године. Заправо, тај папирус тада није био цео. Он је имао два дела и недостајао му је средњи део. Касније је откупљен један папирус за кога се сматрало да садржи податке о медицини. Испоставило се да је он вештачки састављен од више других и ту је заправо нађен и централни део Рајндовог папируса. Рајндов папирус је дужине нешто мање од 5,5 метара и ширине 32 cm. Ахмес је био писар који га је исписао око 1650. г.п.н.е. Он наводи да пише о резултатима познатим од стране старијих аутора из XII династије (1849-1801. г.п.н.е).

Занимљиво је навести да постоји и документ врло сличног садржаја, а који је написан 2000 година после овог.

Ахмес почиње амбициозно: „Ово је детаљна студија свих ствари, увид у све што постоји, знање свих опскурних тајни”. Но, то је заправо математички приручник састављен од 85 проблема, а те „опскурне тајне” су множење и дељење.

Множење је заправо била у суштини адитивна операција код старих Египћана. Основна идеја код множења састојала се у удвостручавању (или преполовљавању) и каснијем сабирању.

$19 \cdot 37$

/	1	37
/	2	74
	4	148
	8	296
/	16	592
	19	703

$37 \cdot 19$

/	1	19
	2	38
/	4	76
	8	152
	16	304
/	32	608
	37	703

Дељење је супротно множењу – тражи се број који множењем са делиоцем даје дељеник. За дељење 91 : 7 прави се иста таблица као за множење, али се резултат другачије очитава.

	91 : 7	
/	1	7
	2	14
/	4	28
/	8	56
	13	91

Наравно, при дељењу се појављују и разломци. Египћани су имали велику преференцу ка јединичним разломцима, тј. ка разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они су означавани тако што је изнад хијероглифских симбола за именилац исписиван издужени овал (који значи „део”). На пример: . Ми можемо да користимо скраћене ознаке, на пример, $\overline{134}$, за разломак $\frac{1}{134}$. Осим ових, имали су посебну ознаку и за 2/3:

Занимљиво је навести да, ако би желели да нађу 1/3 од неког броја, најпре би налазили 2/3, а потом 1/2 од добијеног резултата! Осим тога, за рачунање би се понекад множило (делило) са 10. Дакле, комбинацијом удвостручавања, множења са 10, преполовљавања, дељења са 10 и множења са 2/3 трудило се да се дође до резултата. Но, Египћани су изражавали резултате користећи те јединичне разломке. Јасно је да је онда потребно видети како се бројеви облика $2 \cdot \overline{n} (= \frac{2}{n})$ изражавају преко јединичних разломака.

Прва трећина Ахмесовог папируса састоји се од таблице у којој се разломци $2/n$ изражавају у облику збира јединичних разломака за непарне бројеве од 5 до 101. Сем што је коришћен идентитет

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k},$$

није јасно због чега су коришћени баш такви развоји, а не неки други. Наведимо део таблице.

$$2 \cdot \overline{5} = \overline{3} + \overline{5} \qquad 2 \cdot \overline{7} = \overline{4} + \overline{28}$$

$$2 \cdot \overline{11} = \overline{6} + \overline{66} \qquad 2 \cdot \overline{17} = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$$

$$2 \cdot \overline{19} = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114} \qquad 2 \cdot \overline{31} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$$

$$2 \cdot \overline{37} = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296} \qquad 2 \cdot \overline{41} = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$$

$$2 \cdot \overline{47} = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470} \qquad 2 \cdot \overline{49} = \overline{28} + \overline{196}$$

$$2 \cdot \overline{71} = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710} \qquad 2 \cdot \overline{73} = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$$

$$2 \cdot \overline{91} = \overline{70} + \overline{130} \qquad 2 \cdot \overline{97} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.$$

На пример, у таблици имамо

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114},$$

а не

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}.$$

Нека правила су уочена.

1. Преферирају се мањи имениоци, ниједан није већи од 1000.

2. Што мање јединичних разломака, никад их нема више од 4.

3. Пожељнији су парни имениоци од непарних, посебно за почетне чланове у представљању.

4. Прво иду мањи имениоци и нема једнаких.

5. Најмањи се може повећати ако то може довести до смањивања осталих – на пример имамо $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$, а не $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$.

Множење разломака се изводи једноставно.

$$(2+\overline{4})\cdot(1+\overline{2}+\overline{7})$$

$$\begin{array}{llll}
 & 1 & 1+\overline{2}+\overline{7} \\
/ & 2 & 3+\overline{4}+\overline{28} \\
 & \overline{2} & \overline{2}+\overline{4}+\overline{14} \\
/ & \overline{4} & \overline{4}+\overline{8}+\overline{28} \\
\hline
 & 2+\overline{4} & 3+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}
\end{array}$$

Наравно, овде је коришћен развој из таблице $2\cdot\overline{7}=\overline{4}+\overline{28}$, као и то да је $2\cdot\overline{2n}=\overline{n}$.

У проблему 33 из Ахмесовог папируса појављује се проблем налажења броја који помножен са $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ даје 37. То је сложеније. Најпре почиње стандардно (користићемо стандардне садашње ознаке ради лакшег праћења):

$$\begin{array}{lrr}
 & 1 & 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
 & 2 & 4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
 & 4 & 9+\frac{1}{6}+\frac{1}{14} \\
 & 8 & 18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} \\
/ & 16 & 36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}
\end{array}$$

Сада се израчуна шта се добија када се збир ових последњих разломака, који је мањи од 1, помножи са 42.

	1	42
/	$\frac{2}{3}$	28
	$\frac{1}{2}$	21
/	$\frac{1}{4}$	$10+\frac{1}{2}$
/	$\frac{1}{28}$	$1+\frac{1}{2}$
		40

Зашто је ту множено са 42? Очигледно зато што је то заједнички именилац за почетне разломке $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$, а сврха је била да се установи колико недостаје до 1. Недостаје дакле 2/42. Но, с обзиром да је $(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}) \cdot 42 = 97$, а што је показано у проблему 31, број који треба да се дода броју 16 је број $\frac{2}{97}$, а из таблице је то $\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. Дакле, коначно решење је $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Проблем 24 је лакши, али је занимљив метод његовог решавања. Он спада у 'аха' проблеме, или проблеме 'гомиле':

Гомила и њена седмина дају 19. Колика је та гомила.

Решење је базирано на методу 'погрешне претпоставке' – за решење се најпре узме нешто погодно, што није решење, а затим се пропорционално коригује. Дакле, овде се ради о линеарној једначини:

$$x+\frac{1}{7}x = 19.$$

Примећујемо да је погодно узети да је $x = 7$. Тада се добија да је $x+\frac{1}{7}x = 8$, што није оно што желимо и зато то коригујемо – оним чиме треба помножити 8 да се добије 19 множимо 7 да добијемо резултат.

Најпре се израчуна шта се добија када се претпостави да је резултат 7.

$$
\begin{array}{ccc}
/ & 1 & 7 \\
/ & \frac{1}{7} & 1 \\
\hline
 & & 8
\end{array}
$$

Потом се тражи број којим треба помножити 8 да се добије 19.

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & 8 \\
/ & 2 & 16 \\
 & \frac{1}{2} & 4 \\
/ & \frac{1}{4} & 2 \\
/ & \frac{1}{8} & 1 \\
\hline
 & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &
\end{array}
$$

И на крају се тај број множи са 7.

$$
\begin{array}{ccl}
/ & 1 & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
/ & 2 & 4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\
/ & 4 & 9+\frac{1}{2} \\
\hline
 & & 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}
\end{array}
$$

Проблем 28 је сличног облика, али се из решења може разумети да он спада и у ону групу проблема са којима смо се сретали када смо били деца – старији вам кажу да замислите неки број и да онда изведете неке операције са њим, те онда ‘погоде’ који сте број замислили.

Одреди који је то број коме када додаш његове $2/3$ и од добијеног одузмеш $1/3$ суме добијеш 10.

А процедура за решење је кратка.

Нађи $1/10$ од 10. То је 1. Од 10 одузми 1. Добијеш 9. И то је решење.

У овом решењу се заправо крије следећи идентитет (n је природан број):

$$n + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}\left(n + \frac{2}{3}n\right) - \frac{1}{10}\left(n + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}\left(n + \frac{2}{3}n\right)\right) = n.$$

У проблему 79 налазимо сумирање геометријског низа.

			куће	7
/	1	2801	мачке	49
/	2	5602	мишеви	343
/	4	11204	снопови	2401
		19607	хекати	16807
				19607

О чему се овде ради? Најпре, каква је ово рачуница у првој колони? Једна од интерпретација је да се овде користи идентитет (наравно у врло једноставном облику):

$$q + q^2 + \cdots + q^n = q(q + \cdots + q^{n-1} + 1).$$

Наиме, 2801 је сума прва четири члана низа са десне стране, увећана за 1. А спомињање кућа, мачки, мишева и осталог као да сугерише неки забаван проблем у коме се види колико би се уштедело хеката пшенице (хекат је египатска мера) уколико би свака мачка у 7 кућа појела 7 мишева...

Рецимо на крају нешто и о египатској геометрији. Херодот Египћанима приписује стварање геометрије:

> Кажу да је овај краљ поделио земљу међу свим Египћанима тако да сваки добије четвороугао исте величине и да онда он повлачи своје приходе од пореза на ту земљу. Али свако коме би река одузела део земље је имао обавезу да дође код краља и да га обавести шта се десило. Краљ би онда послао надзорнике који би премерили за колико се земља смањила, да би власник могао да плати порез на остатак земље. На тај начин, чини се мени, настала је геометрија.

Премеравање земље су вршили експерти које су Грци називали „затезачи конопца". Наиме, по свему судећи, њихово главно оруђе су били конопци са означеним чворовима на њима. Демокрит је 420. г. п. н. е. у једном спису показао да су они били и тада врло цењени. Наиме он се похвалио:

> Нико ме не може надмашити у конструкцији равних фигура уз доказ, чак ни такозвани затезачи конопца у Египту.

Наравно, нама нису остали никакви подаци о доказима из Египта. Има више примера правила рачунања неких површина, која су емпиријског карактера. Укључујући и нека погрешна. На пример, у доста каснијем периоду, око 100 г. п. н. е. у храму Хоруса у Едфу, налазе се подаци о многим четвоространим пољима која су била поклони храму и за свако од њих се површина рачунала по формули

$$P = \frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

где су a и c, односно b и d наспрамне странице тог четвороугла. Јасно нам је да то није тачна формула; она јесте приближно тачна ако је четвороугао приближно правоугаоник.

Геометријски проблеми у Ахмесовом папирусу су проблеми 41–60. У проблему 51, Ахмес описује да се површина једнакокраког троугла налази када се половина основице помножи његовом висином. То образлаже тиме да се једнакокраки троугао може поделити на два правоугла троугла из којих се може саставити правоугаоник. На сличан начин, у проблему 52, одређује се формула за површину трапеза чије су основие 4 и 6, а висина 20. Узимајући половину збира две основице, да би се направио правоугаоник, множи са висином и налази површину.

Значајно египатско остварење је налажење површине круга. У проблему 50, објашњава Ахмес да се површина круга пречника 9 добија тако што се од пречника одузме његова деветина, то јест 1, и онда се то што се добије, то јест 8, помножи са самим собом. Добија се 64, што је, како каже Ахмес, тражена површина.

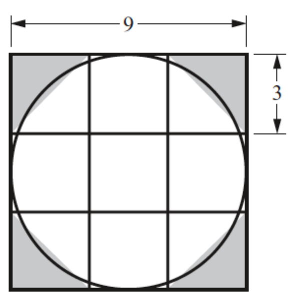
Дакле, ако са R означимо пречник круга, формула за површину круга је

$$P = \left(R - \frac{R}{9}\right)^2 = \left(\frac{8R}{9}\right)^2.$$

Ово нам даје вредност за π, $\pi = 3\frac{1}{6}$. Што и није тако лоше. Још је важније, од ове приближне вредности, египатско правило да је однос површине круга према обиму једнака односу површине описаног квадрата према његовом обиму, а то је потпуно тачно. Не знамо са сигурношћу како су Египћани дошли до ове формуле, али проблем 48 код Ахмеса можда даје наговештај.

Слика 5: Проблем 48 код Ахмеса

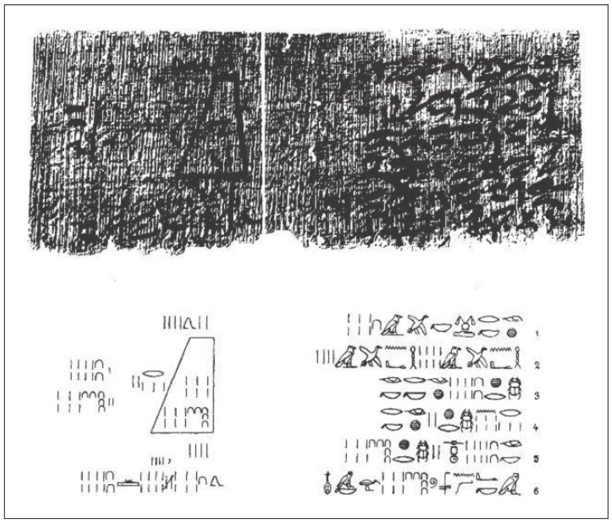
Ту се као поставка проблема појављује ова слика која представља квадрат од кога је формиран осмоугао. Пошто се ту налази и демотски знак за број 9, чини се да се ради о квадрату странице 9 из кога су исечени једнакокраки правоугли троуглови од којих сваки има површину $\frac{9}{2}$.



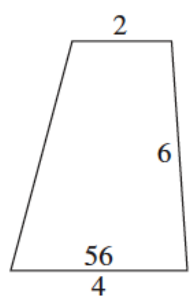
Слика 6: Круг уписан у квадрат

Могуће је да је Ахмес закључио да је површина тог осмоугла блиска површини круга уписаног у квадрат.

У вези рачунања запремина, наводимо проблем 14 са Московског папируса, који има само 25 проблема. Познат је и као Голенишчевљев папирус по египтологу Голенишчеву. Ту се може видети следећа сличица.



Заправо, ако поставимо само оно што је ту најважније имамо ово.



Чини се да је овде опет у питању неки трапез, али се из поступка види да се заправо ради о схематском приказу зарубљење пирамиде. Основе чине два квадрата странице 4 и 2, док је висина 6. Описује се поступак налажења запремине ове зарубљене пирамиде који заправо одговара формули

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Наиме,

$$\frac{6}{3}(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 2(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56.$$

Наравно и овде постоје претпоставке како су Египћани дошли до те формуле, али се тиме нећемо бавити.

За крај наведимо да су Египћани користили и концепт који de facto одговара котангенсу угла. Није се наравно спомињао угао, али се рачунало колико закошена дуж одступа од вертикалне рачунањем односа одступања једног темена од вертикалне пројекције другог и висине на којој се налази друго теме – однос две катете у правоуглом троуглу чија је хипотенуза та дуж. Занимљиво је да је за вертикално одстојање коришћена једна јединица мере, а за хоризонтално друга, но наравно да то није суштински важно.