Ка Calculusu 2. Њутн

Зоран Петровић

29. април 2022. године

Кавалијери

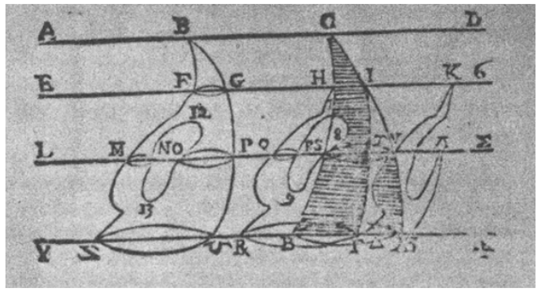
Бонавентура Кавалијери (1598–1647), био је професор у Болоњи. Као млад је математику учио од Кастелија, који је био предавач на универзитету у Пизи. Кастели га је увео у Галилејеве идеје и када га је најзад упознао, сматрао је себе његовим учеником. У периоду 1619–1641. Кавалијери је написао више од 100 писама Галилеју, који је само повремено писао Кавалијерију. Кавалијери је уз препоруку Галилеја 1629. добио позицију на универзитету у Болоњи. Галилеј је, између осталог написао:

...мало је оних, ако их уопште и има, који су од Архимеда тако дубоко ушли у геометријску науку као што је то урадио Кавалијери...

Његово изузетно значајно дело „Геометрија недељивих” објављено је у Болоњи 1635. године. Може се рећи да је то први уџбеник у коме су разматране методе интеграције. Ту он посматра равне површине као суме недељивих, тј. дужи од којих су састављене. Слично су запремине суме равних површина. У том делу се налази и добро нам познати Кавалијеријев принцип за одређивање површине равних фигура, као и запремине тела који се и сада користи у математици у средњој школи. Ево како га је он формулисао.

Теорема. Ако се између две паралеле конструишу две равне фигуре тако да свака права линија које је подједнако удаљена од тих паралела сече две фигуре тако да су одговарајући пресеци међусобно једнаки, онда су и те равне фигуре једнаке једна другој; и ако се између две паралелне равне конструишу два тела тако да свака раван која је подједнако удаљена од ових паралелних равни сече оба тела у једнаким деловима, онда су та тела једнака једно другом.

Наравно, када каже „једнаке” мисли да су одговарајуће дужине, односно површине једнаке.

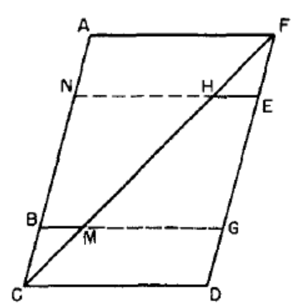


Доказ који презентира базира се на постепеном преклапању ових фигура (тела). Наиме, једну од њих помери да се бар делимично преклопи са другом. После тога, у обе остају делови који се не преклапају, али ти делови задовољавају иста својства као и почетни. Узастопним преклапањем смањују се те 'непреклапајући' делови. Кавалијери каже да се тај поступак настави док не дође до потпуног преклапања. Наравно, нећемо се бавити критиком овог доказа, желимо само да прикажемо Кавалијеријево размишљање.

Кавалијеријев метод се састојао од поређења недељивих у једној фигури са недељивим у другој. И он сам је био свестан опасности које су ту крију и даћемо и један његов такав конкретан пример и како је он покушао да разреши проблем. Но, пре тога ћемо показати како је дошао до, de facto, формуле

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

за $1 \leqslant n \leqslant 9$. Резултат за $n = 2$ приказао је у „Геометрији недељивих”. Како се то своди на квадратуру параболе, коју је већ извео Архимед, он нема ништа ново. У делу „Шест геометријски вежби” објављеном у Болоњи 1647. нашао је горенаведену формулу за остале случајеве. Показаћемо како је он то урадио за $n = 3$, али најпре ћемо објаснити његов метод на једноставнијим случајевима, тј. за $n = 1$. Кључна је следећа слика.



Видимо паралелограм који је дијагоналом подељен на два (подударна) троугла. Приметимо да је $HE = BM$, $NH = MG$. Сва образложења код Кавалијерија су текстуална, да бисмо лакше и презентовали и разумели шта ради користићемо симболику. Нека је $HE = x$, $NH = y$ и $AF = a$. Тада је $x + y = a$, те је $\sum x + \sum y = \sum a$, где смо уместо Кавалијеријевог *o.l. (omnes lineae)*, тј. све линије, користили ознаку за суму. Ту се сумира по свим дужима (већ смо рекли како је он гледао на налажење површине). Но, како је $HE = BM$, имамо да је $\sum x = \sum y$, те је $\sum x = \frac{1}{2}\sum a$. Овде је $\sum x$ површина троугла, док је $\sum a$ површина паралелограма. Тако смо добили да је површина троугла половина површине паралелограма, што је наравно добро познато од давних времена, али ово заправо одговара нашој формули $\int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2$. Наиме, ако додамо Δx, имамо да је

$$\sum x\Delta x = \frac{1}{2}\sum a\Delta x = \frac{1}{2}a\sum \Delta x = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}a^2.$$

А ова сума $\sum x\Delta x$ одговара интегралу $\int_0^a x dx$. Наравно, не причамо о доказу у пуној коректности, говоримо о идејама.

Ево како је Кавалијери формулисао резултат који ми видимо као формулу $\int_0^a x^3 dx = \frac{1}{4}a^4$.

Став 21. Сви кубови паралелограма AD су четворострука вредност свих кубова било ког од троуглова ACF или FDC.

Већ смо, од грчке математике, упознати са тим скраћеним ознакама за паралелограм (а Кавалијери је био под великим утицајем Еуклида). Користимо исте ознаке као и у претходном доказу. Кавалијери тврди да је

$$\sum a^3 = 4\sum x^3 = 4\sum y^3.$$

Ево како он то показује (уз нашу симболику). Најпре наводи да је

$$\sum a^3 = \sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 + 3\sum x^2 y. \tag{1}$$

Потом констатује да је

$$\sum a^3 : \sum ax^2 = \sum a^2 : \sum x^2 = 3:1,$$

а последњи однос зна из случаја $n = 2$. Дакле,

$$\sum a^3 = 3\sum ax^2.$$

Но,

$$\sum ax^2 = \sum (x+y)x^2 = \sum x^2 y + \sum x^2 x = \sum x^2 y + \sum x^3.$$

Дакле, из горње пропорције се добија да је

$$\sum a^3 = 3\sum x^2 y + 3\sum x^3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) добија

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 = 3\sum x^3.$$

Но, како је $\sum x^3 = \sum y^3$, добијамо да је

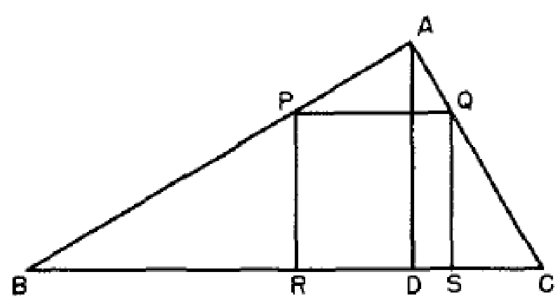
$$3\sum xy^2 = 3\sum x^2 y = \sum x^3.$$

Коначно је

$$\sum a^3 = 4\sum x^3,$$

јер је сваки сабирак у (1) једнак $\sum x^3$. И овакав доказ се може скратити, али то нам није важно.

У писму Кавалијерија његовом млађем колеги Торичелију наводи се следећи парадокс. Посматрамо разнострани троугао ABC са висином AD.



Ако посматрамо паралеле PQ страници BC и онда паралеле PR и QS висини AD, видимо да је $PR = QS$. Стога је $\sum PR = \sum QS$. Но, по теорији недељивих $\sum PR$ је површина троугла ABD, док је $\sum QS$ површина троугла ADC. А јасно је да те површине нису једнаке. Кавалијери је покушао да разреши тај парадокс тако што је дужи PR, QS посматрао као танке нити тканине. Ако је $AB = 2AC$ и ако AC садржи 100 тачкица, онда AB садржи 200 тачкица и стога имамо 100 нити у ADC, а 200 у ADB. Но, овде имамо ипак прелаз на дводимензионалне објекте. То није конзистентно са теоријом недељивих. Наравно да је нама сада јасно да је једно разматрати да ли постоји бијекција између два објекта, а нешто друго је питање да ли им је мера (површина, запремина) иста. Са тим проблемом се касније срео и Лајбниц, који је најпре користио, попут Кавалијерија, скраћеницу *omn.* (све): *omn.y*, потом $\int y$ (*omn.* представља суму (свих), а $\int$ је продужена верзија слова S (сума)), али је потом ипак дошао до $\int y dx$.

Торичели

Еванђелиста Торичели (1608–1647) данас нам је пре свега познат као физичар и изумитељ барометра, но у своје време он је имао значајне математичке резултате. Да је дуже поживео, могуће је да би он дошао до резултата до којих су нешто касније дошли Њутн и Лајбниц. Нажалост, добио је тифус и веома брзо после тога је умро. Оставио је једном свом пријатељу своја дела да би овај обезбедио да она буду објављена. Но, неки се тог задатка нису ни желели да прихвате, док је Вивијани то прихватио, но на крају то није ни урадио. Неки су рукописи изгубљени, а прва три тома су објављена тек 1919. године, а четврти 1944, дакле скоро 300 година после његове смрти.

У младости је учио математику од Кастелија, као и Кавалијери, али се временом упознао са делима Архимеда, упознао је и Галилеја, као и Кавалијерија и наставио да развија метод недељивих. У почетку је био веома скептичан према том методу, али га је касније прихватио и дошао до низа резултата. Бавио се циклоидом, нашао је површину испод једног њеног лука и тај резултат објавио због чега је дошао у сукоб са Робервалом, који је до тог резултата дошао пре њега, али га није објавио. Можда није лоше навести да је Робервал често долазио у сукоб са разним математичарима свог времена у вези приоритета резултата. Наиме, он није желео да објави своје резултате из врло практичног разлога. Имао је позицију која је захтевала проверу на сваке четири године и онда би се кандидати за ту позицију „надметали” са њим у решавању проблема. Он је имао те резултате и методе које је чувао за себе и онда би тако обезбедио позицију. Но, нужно су до тих резултата долазили временом и други математичари, те је имао те сукобе, а и мање резултата носи његово име захваљујући таквом приступу.

Торичели се бавио и разним спирала и у вези проблема квадратуре и проблема ректификације (одређивања дужине). Изучавање путање пројектила, где је наставио рад Галилеја, посебно зависности пређеног пута и брзине од времена, указивале су му на инверзност процеса налажења површине и тангенте, али није то у довољној мери наставио (а можда и јесте, но ми то не знамо, пошто су свакако неки његови рукописи изгубљени). За решавање проблема квадратуре користио је метод недељивих, али је и давао доказе на класичан, Архимедов геометријски начин да би их учинио доступним и онима којима нови метод није био довољно познат. У његовим делима се могу наћи и разни парадокси до којих се долази некритичном применом метода недељивих (као што смо већ видели на једном ранијем примеру), те је јасно да је био свестан ограничења тог метода.

Можда је најзанимљивији његов резултат у коме је показао да тело које се добија ротацијом хиперболе $xy = a^2$ око y-осе и које је ограничено условом да је $y \geqslant b$ за ма које позитивно b (наравно користимо данашње ознаке и терминологију) има коначну запремину. Показао је заправо да то тело уз један додати ограничен цилиндар има исту запремину као један други ограничен цилиндар. Недељиве које је овде користио су били паралелни кругови који се добијају при тој ротацији.

Валис

Џон Валис (1616–1701) био је један од првих чланова Краљевског друштва у Енглеској и сматра се за најутицајнијег енглеског претходника Њутна. Био је професор на Оксфорду и на тој позицији је наследио Бригза о коме је било речи у теми о логаритмима. Године 1665. Валис је објавио две изузетно значајне књиге од којих се једна бави даљим развојем аналитичке геометрије („Трактат о конусним пресецима"), но друга је ипак посебнија, пошто није имала свог пандана. Ради се о књизи „Аритметика бесконачно малих" у коме је Валис извршио 'аритметизацију' Кавалијеријевих идеја о недељивим. Он је гледао да те идеје ослободи геометријских разматрања попут оних манипулација које је изводио Кавалијери поредећи дужи у троуглу и паралелограму, а које смо видели у Кавалијеријевом поступку налажења, de facto интеграла $\int_0^a x^n dx$. Ево како он објашњава како се, на пример, долази до резултата $\int_0^1 x^3 dx$.

Он пореди суме трећих степена чланова аритметичког низа, за који заправо узима да је $0, 1, 2, \dots$ са сумама трећег степена највећег од њих. Наиме, ова сума трећих степена му одговара троуглу који се састоји од паралелних дужи чије дужине чине аритметички низ (а полази се од тачке, темена троугла и рачуна кубове њихових дужина), а сума трећег степена највећег од њих одговара сумама кубова дужи у паралелограму који се састоји од једнаких паралелних дужи (он каже да се „такорећи троугао састоји од паралелних дужи..."; наравно да је за ово „такорећи" било критике од стране других математичара касније). Како је

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125+125} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216}{216+216+216+216+216+216+216}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24},$$

он закључује да се по индукцији може закључити да је однос увек за $\frac{1}{4n}$ већи од $\frac{1}{4}$ уколико је n највећи члан којим степенујемо. Наравно да се не ради о строгој математичкој индукцији, и због тога је био критикован од стране француских математичара, него о наслућивању правила на основу постојећих примера. Констатује да када имамо суму бесконачно много чланова (да не улазимо сада у питање како је то замислио да се реализује, јасно је интуитивно шта жели) онда тог додатка и нема, те је тражени однос $\frac{1}{4}$. Ово он констатује за све n од 1 до 10. Но, сада може да закључи и то да је $\int_0^1 \sqrt[n]{x}dx=\frac{n}{n+1}$. Наиме, функција $y=x^n$ може се записати и као $x=\sqrt[n]{y}$, те је површина испод криве $y=\sqrt[n]{x}$ (када је $0\leqslant x\leqslant 1$), а која се може записати и као $x=y^n$ заправо комплемент површини испод криве $y=x^n$ када је $0\leqslant x\leqslant 1$. Пошто за њу зна да је једнака $\frac{1}{n+1}$, ова друга је $1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Онда он смело закључује да је површина испод криве $y=x^{m/n}$ (модерне ознаке, он је користио нешто другачије ознаке) једнака $\frac{1}{1+\frac{m}{n}}=\frac{n}{m+n}$.

Ево још једног његовог занимљивог закључивања, у коме је антиципирао касније Ојлерове резултате о Гама и Бета функцији. Знајући претходне резултате, он је могао да израчуна површине испод кривих $y=(x-x^2)^n$ за $0\leqslant x\leqslant 1$ (дакле, de facto $\int_0^1(x-x^2)^n dx$). Пошто је израчунао за неколико вредности n, закључио је да је резултат (у нашим садашњим ознакама) $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. С друге стране је знао да је $\int_0^1(x-x^2)^{1/2}$ наравно површина полукруга полупречника 1/2, те мора бити једнака $\frac{\pi}{8}$. Но, није знао како да тог резултата директно дође пошто није знао како да 'развије' $(x-x^2)^{1/2}$ у нешто што би му омогућило рачунање, тј. није знао биномну формулу за експонент 1/2. Но, ипак је смело заменио $n=1/2$ у горњу формулу и добио да је

$$\int_0^1(x-x^2)^{1/2}dx=\frac{(\frac{1}{2}!)^2}{2!},$$

те је тако дао смисао изразу $\frac{1}{2}!$:

$$\frac{1}{2}!=\frac{\pi}{2}.$$

(Подсетите се формула за Гама и Бета функцију.)

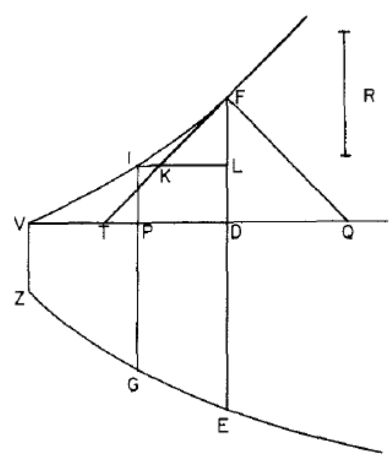
Још један његов вредан резултат, који носи назив по њему, је Валисова формула:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}.$$

Начин на који је дошао до ње је изузетно занимљив, али га ипак нећемо наводити.

Бароу

Исак Бароу (1630–1677) је био други енглески математичар који је извршио велики утицај на Њутна. Он је био професор на Кембрицу и његов приступ математици је био дијаметрално супротан од Валисовог. Није волео алгебарске формализме и сматрао је да алгебра треба да буде део логике, а не математике. Велики поштовалац грчке науке, уређивао је дела Еуклида, Аполонија и Архимеда. Његова два значајна дела су „Лекције из оптике" из 1669. и „Лекције из геометрије" из 1670. Њему је у припремама за објављивање ових дела помогао Њутн који је слушао његова предавања на Кембрицу. Као што је и сам Бароу рекао, „Лекције из геометрије", које се састоје из 13 лекција, нису у потпуности сређене, али је ипак, на наговор пријатеља (Њутна) решио да их објави такве какве су „у природном оделу, као што су и рођене". У њима налазимо разне резултате о налажењу тангенти, површина и дужина лукова. Користио је најпре кинематички приступ, затим и метод недељивих, метод близак Фермаовом за налажење тангенте. Све је приказано на геометријски начин те стога није било тако лако да се препозна важност тих резултата. Ево како је он приказао (и доказао) резултат који данас знамо као Њутн-Лајбницову формулу, или као Основну теорему Calculusa.



Нека је ZGE нека крива чија је оса VD и нека су ортогоналне ординате на ову осу (VZ, PG, DE) такве да непрекидно расту од почетне ординате VZ. Нека је VIF крива таква да ако се постави права линија EDF ортогонално на VD, а која сече криве у тачкама E и F, а VD у тачки D, правоугаоник који је одређен дужином DF и датом дужином R једнак је површини $VDEZ$, а осим тога је тачка T таква да је $DE : DF = R : DT$. Ако се споје тачке T и F, онда ће TF додиривати криву VIF.

Уверимо се најпре, коришћењем савремених знања и ознака да овде заиста имамо Њутн-Лајбницову формулу у геометријском облику. Нека је $y = f(x)$ једначина криве ZGE, а $y = g(x)$ једначина криве VIF. По претпоставци је $Rg(x) = -\int_0^x f(t)dt$. Осим тога је $(-f(x)) : g(x) = R : DT$. Чињеница да је TF тангента на криву VIF нам даје да је $g(x) : DT = g'(x)$. Дакле

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = -Rg'(x) = -R\frac{g(x)}{DT} = -\frac{R}{DT}g(x) = -\frac{-f(x)}{g(x)}g(x) = f(x).$$

Ево како је то Бароу доказао.

Узмимо било коју тачку I на кривој VIF (најпре са исте стране F са које је и V) и кроз њу поставимо IG паралелно са VZ и IL паралелно са VD, које секу дате линије у тачкама као на слици. Тада је $LF : LK = DF : DT = DE : R$, односно $R \cdot LF = LK \cdot DE$.

Али, из природе наведених линија DF и LK, имамо да је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$. Стога је $LK \cdot DE$ једнако површини $PDEG$ која је мања од $DP \cdot DE$. Те је $LK < DP = LI$. На сличан начин се показује да ако се I узме на другој страни од F (у односу на V), и иста конструкција понови, лако се показује да је $LK > DP = LI$.

Одавде је јасно да се цела права TKF налази испод криве VIF.

Он затим додаје да се на сличан начин тражено може добити ако ординате VZ, PG и DE опадају.

Ако постоји нека недоумица зашто је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$, приметимо да је $R \cdot IP$ једнако површини $VPGZ$, те одатле следи и то што је наведено, јер је $LF = DF - DL = DF - IP$.

Њутн и Лајбниц

Да би се привело крају формирање Calculusa било је потребно некако ујединити геометријски приступ (Кавалијери, Бароу) и рачунски (Декарт, Ферма, Валис) и прецизно истаћи везу између тражења тангенти и квадратуре. То су извели Њутн и Лајбниц, а касније су њихови следбеници наставили да појашњавају и развијају метод. Наравно, као што смо већ рекли, све је то најзад постављено на чврсте основе тек крајем деветнаестог века, али до главних резултата се дошло знатно раније.

Њутн је до своје верзије Calculusa дошао у годинама 1664–1668, док је Лајбниц своју верзију формирао у периоду 1672–1676. Јасно је да је Њутн дошао до резултата раније, али их је објавио доста касније, док је Лајбниц своју верзију објавио непосредно по откривању својих резултата. Лајбницова верзија је била практичнија и јаснија и брзо се развијала кроз радове браће Бернули, Ојлера и других. Маркиз де Лопитал (1661–1704) је објавио чак и уџбеник „Анализа бесконачно малих” 1696. године на француском у коме су ове идеје изложене. Он је ту навео да је и Њутн дошао до одговарајућих резултата, али је Лајбницов метод знатно лакши и ефикаснији пре свега због погодније нотације. Занимљиво је напоменути да тај уџбеник заправо представља сређене лекције које је Лопиталу о новим резултатима давао Јохан Бернули.

Рецимо, данас нам добро познато Лопиталово правило је заправо Бернулијев резултат. Наиме, за добар хонорар, Бернули је пристао да даје лекције Лопиталу, који је био врло способан математичар аматер, уз то веома имућан човек и племић. Бернули му је такође слао, према договору, своје нове резултате, које није смео да шаље другим математичарима. Питање је зашто је Бернули направио такав договор, пошто му је позиција професора у Гронингену ипак обезбеђивала довољно средстава. Вероватно је желео да искористи добар положај имућног племића. Све у свему, уџбеник је био одлично написан и објављиван је у више издања. Лопитал је умро као млад човек и после његове смрти Јохан Бернули је навео да су то његови резултати, посебно „Лопиталово правило”. Занимљиво је да му је ретко ко у то поверовао, пошто је он био познат по својим расправама о првенству открића, док је Лопитал важио за врло пристојну особу. Бернулијева прича је потврђена тек почетком двадесетог века налажењем одговарајуће кореспонденције и лекција које је он држао Лопиталу. У сваком случају, данас се сматра да је ту и Лопитал дао значајан допринос у излагању резултата.

Њутнове идеје су даље развијали Тејлор, Меклорен и други британски математичари. Разлог зашто су се тиме бавили само британски математичари треба најпре потражити у расправи о приоритету открића. Занимљиво је да је Њутн у почетку у потпуности признавао Лајбницу независно откриће, али је драстично променио мишљење када су му неки почели да причају како се Calculus на европском континенту у потпуности сматра за Лајбницово откриће. Кренуле су оптужбе за плагијат и свачега је ту било. Ми се тиме нећемо бавити. Јасно је да су обојица имали значајан удео у формирању Calculusa. Тек почетком деветнаестог века су британски математичари прихватили Лајбницове ознаке, највише под утицајем Лапласових резултата. Њутнова ознака $\dot{x}$, за извод по времену, је ипак остала до данас. Физичари је посебно доста користе.

Најпре ћемо се позабавити Њутновим резултатима, пошто је ипак он до њих дошао раније.

Њутн

Исак Њутн (1643–1727) је, на препоруку ујака који је завршио Кембриџ уписао Тринити Колеџ 1661. године и свакако није планирао да постане математичар пошто је до тада врло мало учио математику. Чак се и на самом Кембриџу у то време веома мало предавала математика. Но, он је одмах кренуо да учи Еуклида, а потом и Ван Схутеново издање Декартове „Геометрије”, веома цењен у то време Отредов уџбеник „Кључ за математику”, Кеплерову „Оптику”, Вијетове радове и, наравно, Валисову „Аритметику”. Осим тога, слушао је и Бароуове лекције. После 1663. се упознао и са делима Галилеја, Ферма, Хајгенса и других математичара.

Од 1664. почиње сопствена истраживања. Први резултат до кога је дошао је била биномна теорема за рационалне изложиоце. Заправо је он само открио формулу, није је никада доказао, а није је ни сам објавио. Његова размишљања на ту тему налазе се у писмима која је слао Олденбургу, Немцу који је био стални секретар Краљевског друштва и који је водио интензивну кореспонденцију са многим мислиоцима у то време, нешто попут Марина Мерсена у Француској. Ради се о два писма, која су заправо настала као одговор на Лајбницово интересовање о томе шта је Њутн урадио у вези бесконачних редова. Ова писма су касније објављена у оквиру Валисове „Алгебре”.

Прво писмо је из јуна 1676. године. Оно почиње похвалама Лајбницу, који је, како каже Њутн, сигурно до свега тога дошао и сам, чак можда и боље, али кад се већ распитује шта су Енглези по том питању урадили, ево да он, који је до тога дошао пре неколико година, бар делимично испуни његове жеље.

Разломци се своде на бесконачне редове дељењем; а величине које у себи садрже корене, налажењем корена, извођењем операција са симболима као што се оне уобичајено раде за децималне бројеве. То су основе ових редукција. Али налажење корена се знатно упрошћава овом теоремом

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{ итд.}$$

где је $P+PQ$ величина чији се корен или неки степен или корен неког степена тражи.

Овде најпре да кажемо да је Њутн користио малу другачију нотацију. У то време се уместо заграда користила црта изнад израза. Њутн је заправо писао $\overline{P+PQ}|^{m/n}$. Ово и није необично колико нам се чини. Заправо остатак тога имамо у запису корена. Корен је заправо $\sqrt{}$, а ми онда постављамо црту изнад свега што је под тим кореном. Дакле, да би било јасније, пишемо $\sqrt{a+b}$, а не само $\sqrt{\ }a+b$. Код Њутна је то овако записано: $\sqrt{\ }\overline{a+b}$.

Њутн затим објашњава мало ову нотацију, па пише, на пример, да уместо $\sqrt{c:a^5}$ пише $a^{\frac{5}{3}}$ ($\sqrt{c:}$ се користило за кубни корен). А и каже да A, B, C, D, представљају цео претходни израз. Па је $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$ и слично за C и D. Даје и пример

$$(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^3}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{ итд},$$

који детаљно образлаже.

Остали примери дају решење једначина $y^3-2y-5=0$ и $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, редове за $\sin x$, $\sin^2 x$, решење једног Кеплеровог проблема за елипсу, ректификациу лука елипсе и хиперболе, површину хиперболе уз помоћ развоја за логаритам, квадратуре квадратрисе и запремину одсечка ротационог елипсоида. Њутн не жели баш све да открије, те наводи резултате који су познати.

Наравно, овде је природно запитати се какве везе имају решења ове две наведене једначине са развојем у ред. Наиме, Њутн је 1669. године, када је проучио рад Меркатора „*Logarithmotechnia*" из 1668. и Грегорија „*De vera circuli et hyperbolae quadratura*" из 1667. у којима су разматрани и неки развоји у редове, саставио рукопис „О анализи једначинама са бесконачно много чланова", који је објављен тек доста касније, 1711. године. У том делу разматра баш та два примера. Ево како је он то радио.

Најпре се позабавио нумеричким решењем горенаведене једначине $y^3-2y-5=0$. Примећује да је једно решење близу двојци, те поставља $y=2+p$. Заменом у горњу једначину добија $p^3+6p^2+10p-1=0$. Како је p мало, он занемарује део p^3+6p^2 и поставља $10p-1=0$. Добија да је $p=0{,}1$. Наравно, p није толико, али је близу, стога поставља $p=0{,}1+q$ и то ставља у једначину по p. Добија $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$. Зна да је q мало, па занемари $q^3+6{,}3q^2$ и добије $11{,}23q+0{,}061=0$. Стога за q узима приближно $-0{,}0054$ (овде је извршио заокругљивање, али нема то значаја) и поставља $q=r-0{,}0054$. Добија једначину по r и занемаривањем виших степена добија $r=-0{,}00004853$ (као што и овде видите, Њутн је волео да рачуна). Тако да добија приближно решење једначине $2{,}09455147$. Ево таблице коју је дао да прикаже рачун.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p - 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$ $+1, \quad +10,$ $-1,$
	Summa	$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$+0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$ $-0{,}060642 \quad +11{,}23$ $+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$-0{,}00004854 + s = r$		

Затим прелази на, de facto симболичко решавање једначине $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$. Најпре тражи шта се добија када је $x=0$. Добије једначину $y^3+a^2y-2a^3=0$ и констатује да је решење $y=a$. Сада у почетну једначину замени $y=a+p$ и посматра само линеарне и константне чланове по p : $4a^2p+a^2x=0$. Дакле, p је „приближно” $-\frac{1}{4}x$. Замени $p=-\frac{1}{4}x+q$ и понови поступак. На следећој таблици можемо видети тражени развој y и поступак рачунања.

$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.		
$+a + p = y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$ $+a^3 + a^2p$ $+a^2x + axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$ $-a^2x + 4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 + axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}\ (+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$		

Вратимо се кореспонденцији Њутна и Лајбница преко Олденбурга. Лајбниц је одговорио на ово писмо у августу и у њему је навео неке своје резултате о квадратурама, алудирајући на то да има општи метод. Такође је навео неке примере редова, попут $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, који представља однос површине круга и њему описаног квадрата (дакле $\pi/4$).

Њутн је одговорио у октобру дужим писмом у коме је похвалио Лајбница на резултатима и навео да је и он дошао до таквих резултата. Па ће у овом писму указати на други начин како је дошао до неких развоја.

На почетку својих студија математике, када сам се упознао са радовима нашех славног Валиса, при разматрању редова чијим је уметањем он сам одредио површине круга и хиперболе, чињеница је да се у низу кривих чија је заједничка база или оса x а ординате

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}},\ \text{итд.}$$

ако се површине сваке друге међу њима, наиме

$$x,\quad x-\frac{1}{3}x^3,\quad x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\quad x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,\ \text{итд.}$$

могу интерполирати, морали бисмо добити површине оних између њих, од којих је прва $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ круг: да бих интерполирао ове редове приметио сам да је код свих њих први члан x и да су други чланови $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, итд. у аритметичком низу, и стога прва два члана реда који настаје уметањем треба да буду $x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3\right)$, итд. Да бих уметнуо остале чланове, приметио сам да су имениоци 1, 3, 5, 7, итд. у аритметичком низу, тако да само још вредности бројилаца треба одредити. Али, у датим површинама појављивале су се цифре бројева који су степени броја 11, наиме 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, тј. најпре 1; онда 1,1; на трећем месту 1, 2, 1; на четвртом 1, 3, 3, 1; на петом 1, 4, 6, 4, 1, итд. И онда сам почео да размишљам како се остали бројеви у низу могу добити помоћу прва два и нашао сам да ако ставимо m за други број, остали се добијају непрекидним множењем чланова овог низа

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5},\ \text{итд.}$$

На пример, ако је $m=4$, онда ће $4\times\frac{1}{2}(m-1)$, тј. 6 бити трећи члан и $6\times\frac{1}{3}(m-2)$, тј. 4 ће бити четврти, $4\times\frac{1}{4}(m-3)$, тј. 1 ће бити пети и $1\times\frac{1}{5}(m-4)$, тј. 0 ће бити шести у ком тренутку се низ зауставља. У складу са тим сам применио ово правило и како је, за круг, други члан $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, ставио сам $m=\frac{1}{2}$ и онда су чланови који су се појавили били

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\ \text{или}\ -\frac{1}{8},\quad -\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\ \text{или}\ +\frac{1}{16},\quad \frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\ \text{или}\ -\frac{5}{128},$$

и тако до бесконачности. Тако сам разумео да је површина кружног одсечка коју сам тражио

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{3}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}\quad \text{итд.}$$

Потом констатује да се тако могу формирати одговарајући редови и за остале случајеве. Но, онда је приметио да се и

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{6}{2}},\quad \text{итд},$$

тј.

$$1,\quad 1-x^2,\quad 1-2x^2+x^4,\quad 1-3x^2+3x^4-x^6,\quad \text{итд.}$$

могу на исти начин интерполирати као и површине које они одређују. Само нема имениоца $1,3,5,7$, итд. Дакле, помоћу раније примећеног правила добио је да је

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ldots$$

као и развоје за $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Тако је добио опште правило за развој које је презентовао у првом писму. Да би проверио те развоје помножио је $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ldots$ са самим собом и заиста добио $1-x^2$, јер су остали чланови реда нестали. Слично је $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\ldots$ помножио два пута са самим собом и добио заиста $1-x^2$, те је тако проверио и развој за $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Напокон је извео и другачију проверу. Наиме, нашао је $\sqrt{1-x^2}$ помоћу стандардног метода којим се тражи квадратни корен из неког броја формирањем цифара, а који смо раније објаснили. Овде нам степени x-а представљају цифре. И наравно да је добио исти резултат.

Занимљиво је ово што је Њутн писао прокоментарисати. Видимо да је он „погађао” резултат на један доста једноставан начин. То вероватно није необично, пошто је био инспирисан Валисовим радом, а код њега тога доста има. Но, ипак је извршио проверу касније на други начин. Друга је ствар да он уопште не говори о обичном биномном развоју и одговарајућим коефицијентима (Паскалов троугао), него до тога долази из разматрања површине. Забавна је и напомена у вези степена броја 11. Нама је јасно да се тај феномен дешава због обичне биномне формуле и чињенице да је $11^n=(10+1)^n$. Но, тако можемо добити само биномне коефицијенте који су једноцифрени. Ако бисмо желели да добијемо двоцифрене, онда би требало посматрати 101^n. На пример $101^5=\underline{1}\,\underline{05}\,\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{05}\,\underline{01}$. За вишецифрене наравно треба гледати степене бројева $1001, 10001$, итд.

Њутн потом у писму наводи следећи анаграм

*6accdæ13eff*i*3l9n4o4qrr4s8t12vx.*

Наравно, ми смо навикли на занимљивије анаграме, где треба од неке речи или реченице, које све имају смисла, пермутацијама слова направити нову реч или реченицу. Но, овде је само наведен број појединих слова. Ако би Лајбниц могао ово да распетља, добио би

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvent fluxiones invenire et vice versa.

У преводу:

За дату једначину која укључује ма који број течних величина, наћи протоке, и обратно.

Пре него што прокоментаришемо „шта је писац хтео да каже", наведимо, као занимљивост да су научници у то време користили анаграме да објаве неки свој резултат и да тако установе свој приоритет у проналаску. На пример, Хајгенс је 1655. објавио своје откриће Сатурновог месеца (то је тада био први, сада знамо да је то највећи његов сателит Титан) у облику анаграма: *ADMOUERE OCULIS DISTANTIA SIDERA NOSTRIS UUUUUUU CCCRRHNBQX.* Решење: *Saturno luno sua circunducitur diebus sexdecim horis quatuor*, у преводу Сатурнов месец има орбитални период од 16 дана и 4 сата.

Дакле, Њутн је желео да обезбеди свој приоритет. У чему? Он ту наводи да има општи метод и то је његов метод флуксија. Овде одмах треба рећи да смо у преводу анаграма превели, да се тако изразимо, и више него што је требало. Наиме, 'течне величине' ћемо убудуће звати 'флуенте', а нећемо користити ни термин 'проток', него флуксија. Њутн је разматрао величине које се мењају у времену (то су те флуенте) и брзине њихових промена (флуксије). Вратићемо се на ово врло брзо.

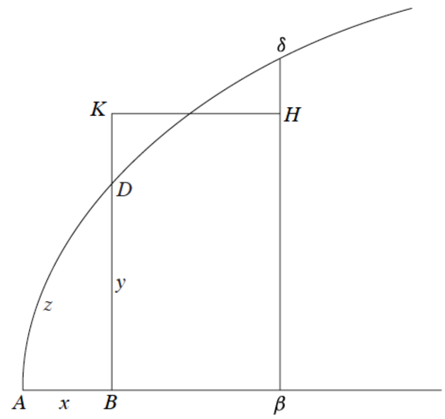
У писму наводи кратко како се налази квадратура криве $z^\theta(e+fz^\eta)^\lambda$ (овде уместо y користи z, док су f и e константе, а θ, λ и η рационалне константе). Заправо овде видимо основни његов метод решавања проблема квадратуре. На почетку свог раније споменутог дела „О анализи једначинама са бесконачно много чланова" Њутн наводи три правила за рачунање површине испод кривих.

Правило 1. Ако је $y = ax^{\frac{m}{n}}$, онда је површина испод y једнака $a\frac{n}{n+m}x^{\frac{n+m}{m}}$.

Правило 2. Ако је y сума више чланова, којих може бити и бесконачно, онда је површина испод y дата сумом површина за све чланове.

Правило 3. Да би израчунали површину испод криве $f(x,y)=0$, треба развити y као суму чланова облика $ax^{\frac{m}{n}}$ и применити Правило 1 и Правило 2.

Видели смо да је Валис извео то прво правило. Ево како је Њутн доказао то правило.



Треба да докаже да, ако је $ax^{\frac{m}{n}} = y$, онда је $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ површина ABD. Заправо, он доказује обрат, тј. из претпоставке да је површина дата наведеном формулом, онда је и y тако као што је наведено!

Најпре је, као припрему, детаљно доказао специјалан случај, када је $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Са цртежа видимо ознаке, а још је $B\beta = o$ и $BK = v$. Ево како он доказује општи случај.

Ако се стави да је $\frac{na}{m+n} = c$ и $m+n = p$, тада је $cx^{\frac{p}{n}} = z$, или $c^n x^p = z^n$. Тада заменом $x+o$ уместо x и $z+ov$ (или, што је исто $z+oy$) уместо z, добија се

$$c^n(x^p + pox^{p-1} \text{ итд.}) = z^n + noyz^{n-1} \text{ итд.}$$

при чему испуштам остале чланове који ће на крају крајева нестати. Даље, ако одбацим једнаке $c^n x^p$ и z^n, а остале поделим са o, остаје

$$c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$$

или, када се подели са $c^n x^p$:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}} \quad \text{или} \quad pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny.$$

Када се c замени својом вредношћу $\frac{na}{m+n}$, а p са $m+n$... добија се $ax^{\frac{m}{n}} = y$.

Дакле, он овде користи да су операције којима барата, а које су, de facto налажење интеграла $\int_0^x f(t)dt$ и извода, инверзне једна другој да би дошао до закључка. Заправо он наводи после и таблицу кривих и површина, односно, de facto таблицу интеграла. У вези доказа можемо да кратко прокоментаришемо да му је o та мала величина (без обзира што на слици изгледа велико!) и да променом x за то o се површина z повећа за површину правоугаоника (свеједно да ли за страницу узме

y или v и једно и друго је приближно, а на крају v постаје y – у доказу специјалног случаја, он користи v и ради развоје до краја, дакле детаљније и пажљивије).

Њутну је од централног значаја било то што је и са редовима могао да ради исто као и са коначним изразима. Ево шта је о томе рекао у овом делу:

> И шта год да обична Анализа (мисли на алгебру) остварује помоћу једначина са коначно много чланова, нови метод може то исто да уради помоћу бесконачних једначина. Тако да нисам имао никакав проблем да му дам име Анализа. Пошто резоновање није мање сигурно него у претходном нити су једначине мање егзактне ... Да закључимо, можемо безбедно да прихватимо да то све припада *Аналитичкој вештини* помоћу чега можемо одредити површине и дужине лукова кривих егзактно и геометријски.

Као што знамо, Вијет је за Алгебру користио назив Аналитичка вештина. О томе овде Њутн говори. Заправо са Њутном и његовим вештим коришћењем редова при рачунању површина, као и прихватањем од стране других математичара, почиње то терминолошко одвајање Алгебре, за коју се везују коначни изрази и Анализе која манипулише са бесконачним изразима (поједностављено говорећи наравно), а коју имамо данас.

Већ смо споменули флуенте и флуксије. Њутн је припремио рад „О методу редова и флуксија” до 1671, али је он доста касније објављен. Дакле, ту имамо кинематичку идеју о величинама које „теку” у времену. На пример, тачка генерише линију, линија генерише површ. Такве величине се називају флуенте, а њихове брзине флуксије. Код Њутна се на одређеним местима појављују и моменти који представљају бесконачно мале прираштаје таквих величина у бесконачно малим интервалима времена (то ће касније Њутн избегавати). У бесконачно малим интервалима сматра да су флуксије константе, те се може сматрати да су моменти пропорционални њима.

Увео је и нотацију да означи тај свој рачун. Са a, b, c, d је означавао константе, са v, x, y, z флуксије, а одговарајуће флуенте са l, m, n, r, док је бесконачно мали интервал времена био o. Касније је, у деведесетим годинама XVII века увео ознаке $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Саме флуксије имају своје флуксије, па је тако посматрао и $\ddot{x}$, па и $\dddot{x}$. А флуенту чија је флуксија x означавао је са $\acute{x}$. Површину испод криве y је означавао са Qy или са $\boxed{y}$.

Њутн је навео једноставан алгоритам којим би добијао везу између флуксија на основу везе између флуенти. Наиме, ако би имао израз ax^n, он би га замењивао са $anx^{n-1}\dot{x}$. Тако би урадио за све чланове у изразу по свим флуентама и онда све то сабирао. На пример, ако има

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \tag{3}$$

добио би

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0. \tag{4}$$

То би оправдао на следећи начин. На x и y би додао бесконачно мале прираштаје $\dot{x}0$ и $\dot{y}o$ и заменио у једначину (3).

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0, \tag{5}$$

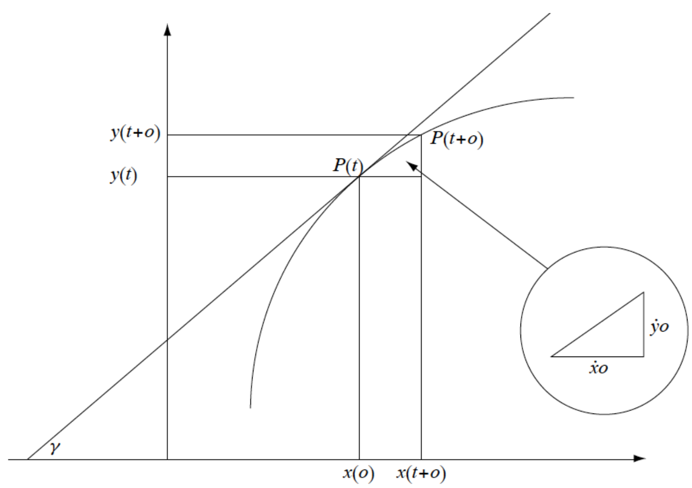
Средио би (5) користећи (3), делећи са o, а онда занемарио чланове који још у себи садрже o, јер је „o бесконачно мало”. Тако би добио заиста (4).

Он се ту бавио проблемима максимума и минимума, налажења тангенте, кривине, површина, дужина лукова. Сви се ти проблеми своде на два проблема.

Проблем 1. Ако је познат пређени пут у сваком тренутку времена, наћи брзину у свакој тачки.

Проблем 2. Ако је позната брзина у свакој тачки, наћи пређени пут у свакој тачки.

Видимо да се ради о два инверзна проблема. Проблем налажења тангенти, екстремних вредности и кривине, своди се на први проблем.



Имамо криву у равни дату једначином $f(x,y) = 0$. Како је $x(t+o) - x(t) = \dot{x}o$ (на слици уместо $x(o)$ треба да стоји $x(t)$) и $y(t+o) - y(t) = \dot{y}o$ и како је o бесконачно мало, може се сматрати да троугао који је издвојен на слици сличан троуглу који чине тачке пресека тангенте и x-осе, $(x(t),0)$ и $P(t)$, те је

$$tg\gamma = \frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Наравно, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ се може наћи раније наведеним алгоритмом. Екстремна тачка је дата са $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$, док је Њутн показао да је полупречник кривине ρ дат са

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\dot{y}/\dot{x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(\ddot{y}/\dot{x}^2\right)}.$$

Године 1687. Њутн је објавио своје „Математичке принципе природне филозофије”. То је свакако једно од најзначајнијих научних дела икада. Пут који је довео до његовог објављивања је био занимљив и нимало једноставан. Нећемо се њиме бавити због недостатка времена, наведимо само као занимљивост да се, да би обезбедио објављивање тог дела, Едмонд Халеј (сви смо чули за Халејеву комету) обавезао да ће он финансирати издање тог дела. Наиме, Краљевско друштво је практично банкротирало издајући „Историју риба”, дело које се уопште није продавало. Пошто је Халеј обезбедио штампање Њутновог дела, добио је на поклон од друштва 50 примерака те књиге коју нико није желео да купи. Сматра се да је прво издање имало око 300 примерака.

Главни проблем је био да се на основу закона универзалне гравитације при чему сила гравитације опада са квадратом растојања установе Кеплерови закони, посебно да се планете крећу по елипсама са Сунцем у једној жижи. Постојао је и озбиљан технички проблем како при овим разматрањима редуковати тела, на оно што сада зовемо, материјалну тачку – како показати да се може претпоставити да је сва маса Земље скупљена у тачку. Њутн је успео да разреши те и друге проблеме, попут кретања тела кроз средину која је пружала отпор (дакле, не кроз вакуум). Сам назив дела даје и критику раније Декартове филозофије која није одговарала физичкој стварности. Овде се ради о МАТЕМАТИЧКИМ ПРИНЦИПИМА а не о чисто филозофском размишљању.

Само дело је написано у геометријском духу, ту се практично флуксије и не појављују. Но, на самом почетку дела налазимо, после основних закона (Њутнових закона како их сада зовемо) 11 математичких лема. Заправо прва глава прве књиге (дело се састоји од три књиге) носи назив Метод првих и завршних односа величина помоћу којих доказујемо тврђења која следе.

Ових 11 лема су разматрали многи аутора током више од 300 година од појављивања Њутновог дела. Занимљивости ради, 1995. године су изашле чак четири књиге које се баве Њутновим ПРИНЦИПИМА. Ми ћемо покушати само укратко да кажемо о чему се овде ради.

Лема I

Величине, или односи величина, који у сваком коначном времену конвергирају непрекидно ка једнакости, и пре истека тог времена се приближавају ближе једна другој од сваке дате разлике, постају напокон једнаке.

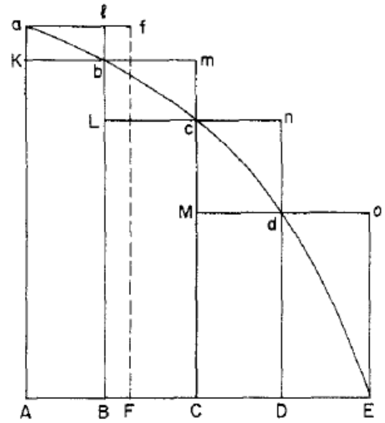
Доказ следи

Ако то одричете, претпоставите да су напокон различите и нека је D њихова крајња разлика. Онда се оне не могу примаћи више једнакости него што је та дата разлика D; што је супротно претпоставци.

Видимо да овде имамо неки облик лимеса, односно закључак да ако имамо две величине чија разлика тежи 0, онда се њихове граничне вредности једнаке (садашњим језиком речено). Претпоставља се 'коначно време' да величине не би постале бесконачно велике. Ово је само коментар, не и озбиљна дискусија, видимо да могу да постоје разне примедбе на ово закључивање.

Лема II de facto говори о постојању интеграла монотоне функције.

Ако се у дату фигуру $AacE$, коју ограничавају праве линије Aa, AE и крива acE упише ма који број паралелограма Ab, Bc, Cd, итд. над једнаким базама AB, BC, CD, итд. и страницама Bb, Cc, Dd, итд. паралелним страници Aa фигуре; и паралелограми $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, итд. се комплетирају: тада ако се претпостави да се ширине паралелограма смањују, и њихов број повећа до бесконачности, кажем да ће завршни односи које ће уписана фигура $AKbLcMdD$, описана фигура $AalbmcndoE$ и криволинијска фигура $AabcdE$ имати једна према другој бити односи једнакости.



Дакле, тврди се да количници ових површина теже ка 1, па се тиме имплицитно тврди и да све површине теже ка истој вредности. Доказ није тежак. Њутн констатује да је разлика између сума површина описаних и уписаних правоугаоника (он наравно каже паралелограма) једнака површини правоугаоника $ABla$, али та површина тежи ка нулу када се AB неограничено смањује. Дакле, он заправо показује да разлике ових површина теже нули, па онда добија тражено уз помоћ прве леме.

Следећа лема говори да се слично може закључити и ако основе нису једнаке. Заправо на горњој слици то видимо. Ту се претпостави да је највећа основа AF, па опет разлика буде мања од површине правоугаоника $AFfa$, која опет тежи нули.

Лема IV пореди две фигуре попут ових са претходне слике, од којих је једна увећана у односу на другу и тврђење је да ако се односи сума уписаних површина правоугаоника приближавају некој вредности, онда ће односи и тих површина бити једнаки тој вредности. Овде видимо нека једноставна својства интеграла (али монотоне функције). Лема V нам такође не представља тешкоћу, она каже да су одговарајуће стране сличних фигура, било криволинијских било праволинијских, пропорционалне једна другој и да се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих страница.

Но, касније леме су сложеније и више би времена однело да покушамо да их протумачимо. Рецимо само да постоје јаки аргументи да се у њима препозна дефиниција извода функције, да се одређује извод синуса (заправо да се показује да $\frac{tg\,x}{x}$ и $\cos x$ теже истој вредности када се x приближава 0, а пошто се зна да се $\cos x$ приближава 1, онда имамо и познати резултат да $\frac{\sin x}{x}$ тежи ка 1, а то наравно одговара резултату да је извод синуса једнак косинусу). Такође се међу тим лемама крије и разматрање другог извода, а и Њутн-Лајбницова формула.

Њутн јесте био свестан проблема у вези његових КРАЈЊИХ ОДНОСА. Пошто он ту, de facto, разматра лимесе облика $\frac{0}{0}$ он покушава да објасни да то може да постоји мада се, јасно, не могу директно заменити вредности. Бискуп Џорџ Беркли је био велики, али и добронамеран критичар тих и сличних, непрецизно дефинисаних појмова и те критике су свакако озбиљно схватане и у даљем су чињени покушаји да се ствари поправе. Наравно, после доста времена смо дошли и до добро заснованог појма лимеса, али Њутн јесте те ствари антиципирао.