Грчка математика 3

Зоран Петровић

18. март 2022.

Архимед

Архимед је свакако био најзначајнији математичар антике и један од најзначајних математичара икада. Живео у је граду Сиракузи на Сицилији, а школовао се, скоро извесно, у Александрији. Знамо да је погинуо при освајању Сиракузе од стране Римљана 212. г. п. н. е. током Другог пунског рата. Како је, по неким историчарима, тренутку смрти имао 75 година, процена је да је био рођен 287. године п. н. е.

Плутарх, у својој биографији римског генерала Марцела, који је освојио Сиракузу, пише да је Архимед био централна личност у одбрани Сиракузе због многих својих механичких направа које су задале велике невоље римским освајачима. Ипак, Плутарх каже, Архимеду су били дражи његови чисто математички резултати од тих машина.

Архимедови радови дуго времена нису били толико познати као Еуклидови *Елементи* добрим делом и зато што су *Елементи*, као што је већ речено, заправо уџбеник елементарне математике, док Архимедови радови то свакако нису. Има међу њима и једноставнијих списа, но многи су веома напредни и другачији.

Он је имао значајну преписку са александријским математичарима. Са Доситејем, који је био студент Архимедовог блиског пријатеља Конона, и Ератостеном који је дуги низ година био управник александријске Библиотеке. У тим препискама налазимо многе Архимедове радове. Ево списка Архимедових радова који су сачувани.

1. О равнотежи равни, Први и Други део
2. Квадратура параболе
3. О сфери и цилиндру, Први и Други део
4. О спиралама
5. О коноидима и сфероидима
6. О плутајућим телима

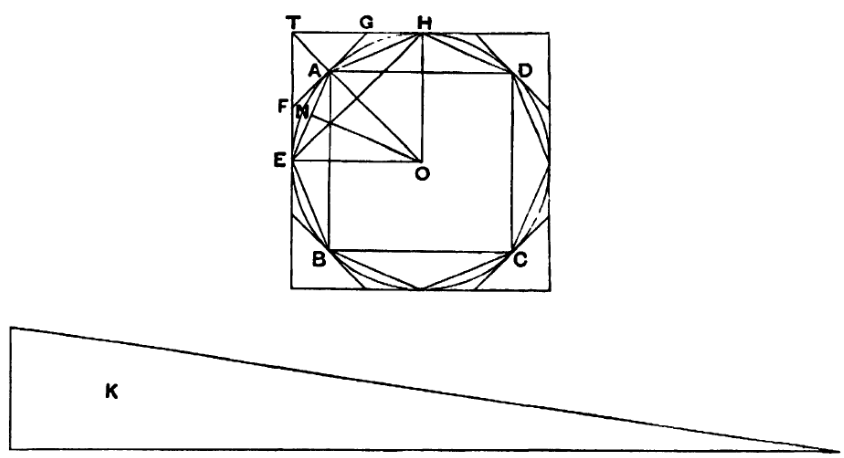
7. Мерење круга
8. Пребројавање песка
9. Метод
10. Књига лема
11. Проблем о стоци

Преписи ових дела потичу из X века и касније, чак и значајно касније.

Наравно да нема говора о томе да се можемо позабавити свим овим радовима, посебно не детаљно, но направићемо неки избор.

Мерење круга

То је веома кратак рад и састоји се само од три става. У првом ставу се тврди да је површина круга једнака површини правоуглог троугла чија је једна катета полупречник круга, а друга је једнака обиму круга. Наравно да је то сада нама јасно, но, присетимо се да је питање квадратуре круга било и даље отворено. Присетимо се и Диностратове квадратуре круга помоћу трисектрисе, у којој се заправо налази дуж једнака четвртини обима круга. Те нам трисектриса омогућава да нађемо и овакав троугао, а лако је наћи квадрат исте површине као и дати троугао. Но, Архимедов резултат није у вези са причом о трисектриси.



Слика 1: Мерење круга

Архимед користи исти метод који смо већ приказали при доказу да се површине кругова односе као квадрати (полу)пречника. Но, ипак га наводимо. Дакле, површина круга може бити једнака, може бити већа, а може бити и мања од површине троугла К. Означимо са $P(k)$ површину круга, а са $P(\mathrm{K})$ површину троугла.

Претпоставимо, најпре да је $P(k) > P(\mathrm{K})$. У круг најпре упишемо квадрат $ABCD$, а потом делимо лукове $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ на пола, те тако добијемо правилни осмоугао. Аналогно настављамо поступак све док не добијемо правилни многоугао чије су странице такве да збир површина одговарајућих одсечака круга не постане мањи од разлике површина круга и троугла, тј. мањи од $P(k) - P(\mathrm{K})$. Стога је површина тог многоугла већа од површине троугла К. Но, ако је ON нормала која полази из O до једне од страница тог многоугла (дакле, то је висина троугла $\triangle AEO$, онда је јасно да је $ON < r$, где је r полупречник круга, а и обим тог многоугла је мањи од обима круга k. Према томе, површина тог многоугла, који је растављен на једнакокраке троуглове, и која је заправо једнака површини правоуглог троугла који за катете има ON и дуж једнаке дужине као и обим тог многоугла (просто се саберу површине ових троуглова и то буде јасно), мора бити мања од површине троугла К, што је контрадикција.

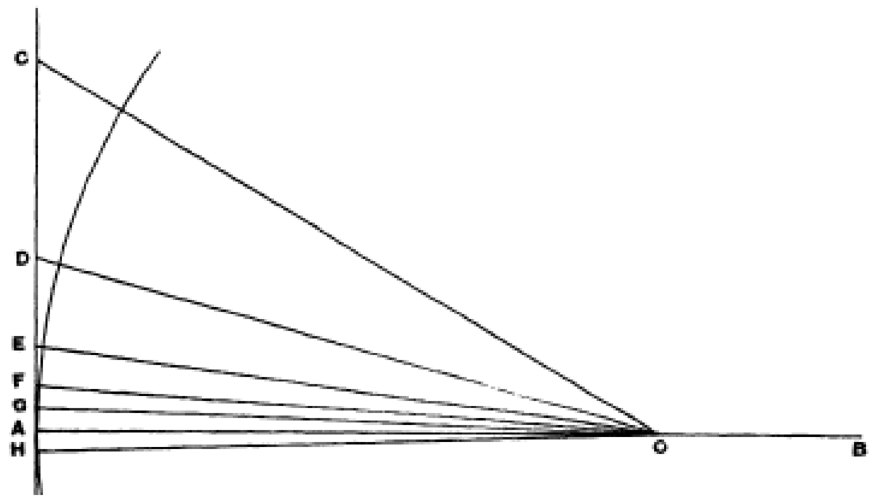
На аналогни начин се, посматрањем овај пут описаних правилних многоуглова долази до контрадикције и уз претпоставку да је $P(k) < P(\mathrm{K})$. Закључује се да мора бити $P(k) = P(\mathrm{K})$.

У ставу 3 се, de facto, доказује процена за π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Наравно, ово је формулисано у терминима процене размере обима круга и његовог пречника. Тај количник, који ми данас означавамо са π, Архимед никако није означавао.

Поступак који је Архимед користио је једноставан.



Он полази од угла који је једнак трећини правог угла, то је на слици угао $\measuredangle AOC$. Зашто од баш тог угла? Разлог је једноставан, када се погледа слика, дуж AC је заправо половина странице правилног шестоугла описаног око датог круга. Архимед потом дели овај угао на пола, (тачка D), поново на пола (тачка E), поново на пола (тачка F) и још једном на пола када добија тачку G. Тада је дуж GH заправо једнака страници правилног 96оугла и Архимед користи обим тог 96оугла да апроксимира обим круга одозго. При рачунању користи процене квадратних корена који се појављују у рачуници. Прва процена коју користи је $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ (касније користи процену $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$). Он не даје никакво објашњење како је дошао до те, а и других, доста сложенијих апроксимација. Заправо, много тога он овде не објашњава, но Еутокије (око 480 – око 540. године), математичар из Палестине, допуњавао је његове рачунице да би могле лакше да се прате (коментарисао је и друга његова дела). Постоје разне хипотезе како је дошао до тих апроксимација, једна од њих сугерише да му је било познато следеће:

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Овде видимо и прву апроксимацију за квадратни корен која се користила у Месопотамији. Занимљивости ради, наведимо још неке процене које је Архимед користио у овом делу:

$$\begin{aligned} 3013\frac{3}{4} &> \sqrt{9082321} \\ 591\frac{1}{8} &< \sqrt{349450} \end{aligned}$$

$$2339\frac{1}{4} \quad < \quad \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$$

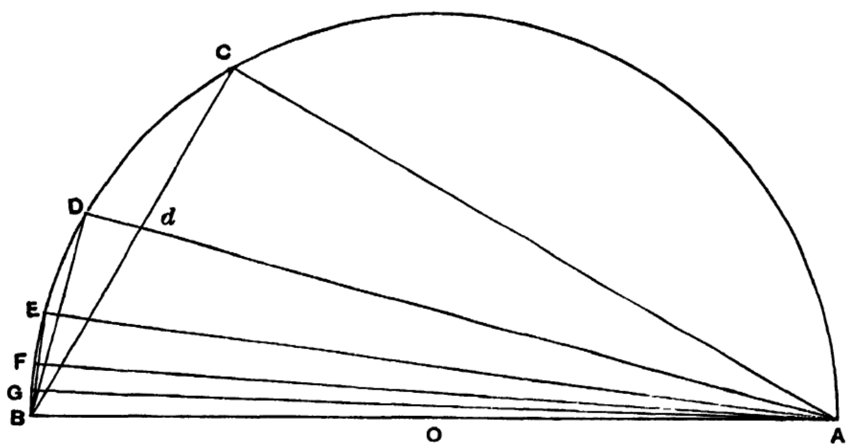
Наравно да не треба памтити ове резултате, али да се ту рачунало, рачунало се. Коначно добија процену за π:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}.$$

Мали трик даје коначну процену:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}.$$

За доњу процену користи наравно уписане правилне многоуглове:

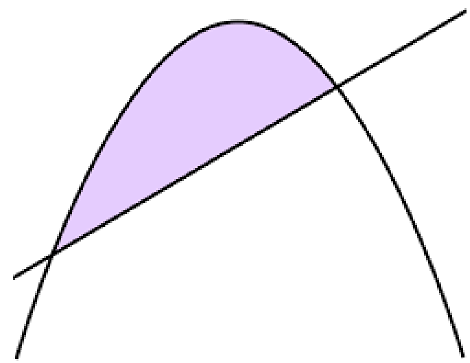


и добија:

$$\pi > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Квадратура параболе

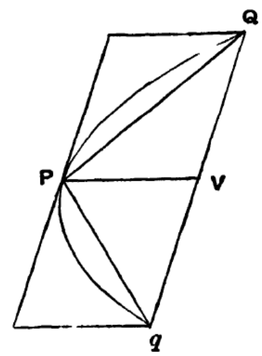
Проблем је једноставан: за дати одсечак параболе (област у равни ограничена параболом и једном правом која је сече) наћи квадрат једнаке површине.



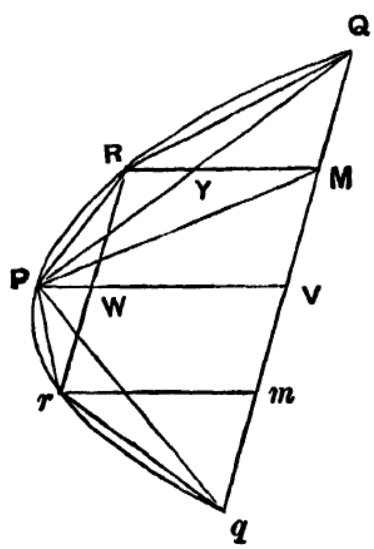
Архимед свој резултат објављује у писму Доситеју и изражава жаљење због смрти Конона, кога је веома поштовао као геометра и који би сигурно могао да лепо процени Архимедов резултат. Занимљиво је овде навести да је Доситеј скоро сигурно био јеврејин. Наиме, име Доситеј је грчка верзија имена Матеј, а не зна се да је ико у Александрији имао то име а да није био јеврејин. Ово је занимљиво зато што је то једина сачувана преписка између Грка и јевреја из тог доба. Архимед наводи да је до резултата прво дошао помоћу механике, а затим га је доказао помоћу геометрије. Он ту презентује оба приступа. Ми ћемо кратко говорити о геометријском приступу.

Основна идеја састоји се у следећем. У дати одсечак параболе уписати троугао максималне површине коме је основица дата тетива. Јасно је да се ради о троуглу чије је теме на параболи, а највише је удаљено од те тетиве. Ми знамо (бар би требало да знамо на основу разматрања из Анализе 1) да је то теме у коме је тангента на параболу паралелна тој тетиви. Наравно, и Архимед је то знао.

Следећа слика је важна.



Овде је $QV = qV$, површине троуглова $\triangle PQV$ и $\triangle qPV$ су једнаке и из паралелограма који се појављују на слици видимо да је површина троугла већа од половине површине тог одсечка (површина нацртаног паралелограма је јасно већа од површине одсечка, а површина троугла је половина површине тог паралелограма). То нам је важно за метод исцрпљивања. У следећем кораку поступак се понавља за два мања одсечка над тетивама Pq и PQ. Архимед је, позивајући се на Еукли-



дово дело о конусним пресецима (које немамо сачувано, али, као што смо већ спомињали, знамо за његово постојање), користећи својства параболе на, релативно једноставан начин показао да су површине троуглова $\triangle PRQ$ и $\triangle Prq$ једнаке и да износе једну осмину површине троугла $\triangle QPq$. Дакле, ако са T означимо површину троугла $\triangle QPq$, онда је површина многоугла $QRPrq$ једнака $T+\frac{1}{4}T$. А, као и на почетку, површина додатих троуглова премашује половину површине остатка. Тако да знамо да ће после коначно много корака преостати површина која је мала колико год желимо. Ми бисмо данас просто констатовали да све то значи да је површина одсечка једнака суми реда

$$T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{16}T+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}T=\frac{4}{3}T,$$

но Архимед није сабирао бесконачне редове. Уместо тога, он је доказао следећи став.

Став 23. Ако је дат низ површина $A,B,C,D,\ldots,Z$, од којих је A највећа и свака је једнака четворострукој следећој, онда је

$$A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A.$$

Ово му је било довољно да покаже да је површина одсечка једнака $\frac{4}{3}T$.

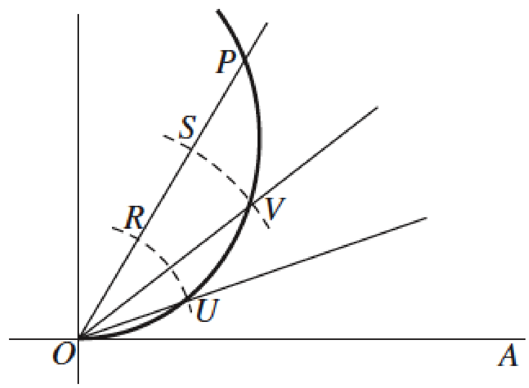
Означимо површину одсечка са Par. Уколико је $\mathrm{Par}>\frac{4}{3}T$, онда би после коначно много корака наведеног поступка добили да нам је остатак површине мањи од $\mathrm{Par}-\frac{4}{3}T$. Како је збир површине добијеног многоугла и тог остатка једнак Par, добили бисмо да је површина тог многоугла већа од $\frac{4}{3}T$. Но, то није могуће јер је површина многоугла једнака $A+B+C+D+\cdots+Z$ (овде наравно узимамо $A=T$, а на основу става 23, $A+B+C+D+\cdots+Z<\frac{4}{3}A$.

Претпоставимо да је $\mathrm{Par}<\frac{4}{3}T$. Полазећи од површине $A=T$ и понављајући поступак долазимо да површине X која је мања од $\frac{4}{3}T-\mathrm{Par}$, а $A+B+C+\cdots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}T$. Дакле, $\frac{4}{3}T$ је веће од $A+B+C+\cdots+X$ за површину која је мања од X, а од Par за површину која је већа од X. То би значило да је $\mathrm{Par}<A+B+C+\cdots+X$, а то наравно није могуће.

Дакле, на овај начин Архимед искључује две могућности и закључује да мора да важи трећа, тј. $\mathrm{Par}=\frac{4}{3}T$. Видимо да су се овакви резултати доказивали у антици без коришћења граничних процеса.

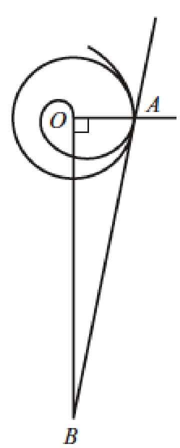
О спиралама

У раду *О спиралама*, Архимед се бави кривом коју је увео преко кретања – полази се од полуправе и њеног темена. Тачка почиње равномерно да се креће по полуправој, од њеног темена, док се сама полуправа равномерно ротира око свог темена. Крива коју описује ова тачка је спирала, коју данас знамо под именом *Архимедова спирала* и чија је поларна једначина $r=a\theta$. Бављењем овом кривом, Архимед одступа од главног тока грчке геометрије. Можда је један од мотива



био и разматрање трисекције угла, као и квадратуре круга које се могу остварити помоћу ове криве:

Да бисмо поделили дати угао на три једнака дела, довољно је поставити угао тако да се један крак поклапа са почетном позицијом полуправе, а потом наћи пресек угла и спирале. То је тачка P на слици. За поделу угла $\measuredangle AOP$ на три једнака дела, довољно је поделити дуж OP на три једнака дела и потом само нацртати одговарајуће лукове круга који у пресеку са спиралом дају тачке V и U и тако и трисекцију угла (уверите се да је ово тако). Није заправо изненађујуће да се помоћу ове спирале добија трисекција угла – и она је крива настала комбинацијом кретања по правој и ротације, као и Хипијина трисектриса. И, као и у том случају, ова крива омогућава и квадратуру круга.



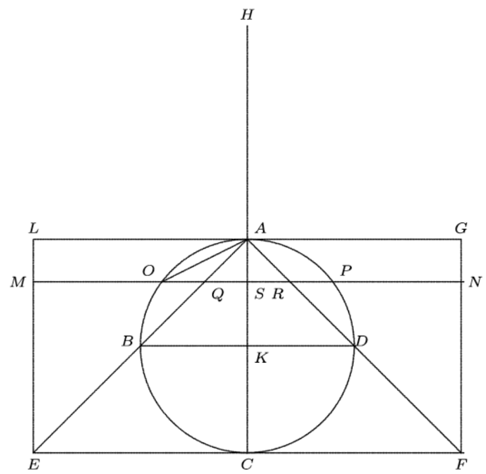
Архимед је показао да, ако је AB тангента на спиралу у тачки A, која се добија на крају прве пуне ротације и ако је $\triangle AOB$ правоугли са правим углом у тачки O, онда је катета OB заправо једнака кружници (једнаке је дужине) са центром у O, полупречника OA. Дакле, као што знамо из његовог рада о мерењу круга, површина $\triangle AOB$ једнака површини круга полупречника OA. Наравно, тада лако налазимо и квадрат исте површине као и тај круг.

Овде се први пут појављује питање налажења тангенте на криву која није конусни пресек. Архимеду је било јасно да је такав проблем, као што уосталом и видимо, еквивалентан квадратури круга.

Метод

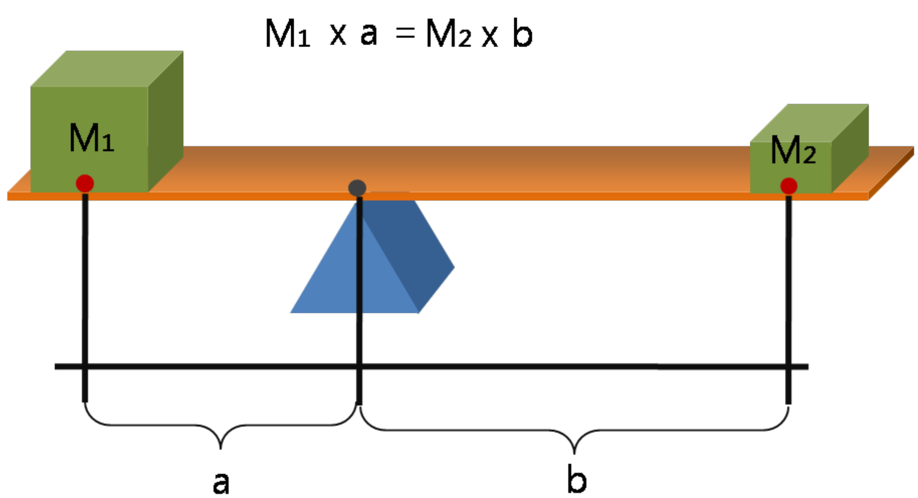
Од посебног је значаја кратко Архимедово дело *Метод*. То дело је било изгубљено дуго времена, мада се знало да је постојало на основу напомена у другим изворима. Нађено је тек 1906. године. Наиме, дански научник Хајберг је сазнао да се у Константинопољу (званичан назив Истанбула је био Константинопољ све до 1923. године, када је формирана Република Турска, а главни град постала Анкара) налази један палимпсест са математичким садржајем. Радило се о пергаменту на коме је избрисан, али не у потпуности, првобитан текст, да би се записао молитвеник који је коришћен у Православној цркви. Хајберг је успео да фотографише листове и открио је да су ту дела Архимеда: *О сфери и цилиндру*, већи део рада *О спиралама*, део рада *Мерење круга* и *О равнотежи равни*, затим *О плутајућим телима* и, најважније од свега, ту је био једини примерак *Метода*. Овај палимпсест је поново изгубљен после Првог светског рата и поново се појавио када је предат на аукцију деведесетих година. Купљен је од стране анонимног дародавца за два милиона долара и касније је модерна технологија искоришћена да се открије оригинални текст у њему.

Шта је заправо *Метод*? Ради се о раду који је Архимед послао као писмо Ератостену, који је тада био управник александријске библиотеке. Архимед ту објашњава како је он долазио до својих резултата користећи не сасвим математички коректно, 'механичко' расуђивање. Како он ту пише, лакше је наћи доказ теореме када се зна о чему се ту заправо ради. Навео је као мотивацију како је Еудокс дошао до својих резултата о купи и пирамиди користећи нека претходна размишљања Демокрита у којима није било доказа. Први резултат до кога је Архимед дошао на овај начин је резултат о квадратури параболе. Но, Архимедов омиљени резултат који повезује запремину и површину сфере (пажљив читалац је можда незадовољан разматрањем запремине сфере, сфера је површ, гледа се њена површина, док кугла има запремину, али то је детаљ који нам овде није битан, причамо и о обиму круга, а не кружнице. . .) и цилиндра чија је висина једнака пречнику сфере, а основа великом кругу те сфере.

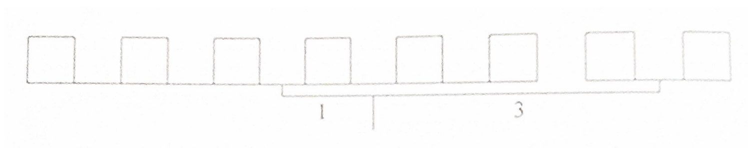


Ротирањем око осе HC добијамо цилиндар, сферу и купу, дакле ова слика нам даје попречни пресек ових тела. Обратите пажњу на чињеницу да је $AGFC$ квадрат, те да је $\triangle ACF$ (а такође и $\triangle ASR$) једнакокраки правоугли троугао.

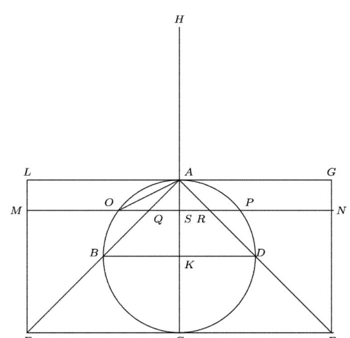
Архимед жели да нађе везу између запремина ових тела користећи закон полуге.



Архимед је извео овај закон пажљивим разматрањем, полазећи најпре од случаја да је $M_1 = M_2$ и да је тада очигледно да се равнотежа постиже када је ослонац на средини, тј. када је $a = b$. Затим је разматрао шта се дешава када су M_1 и M_2 различити, али ипак самерљиви. На пример, ако је $M_1 = 2r\mathrm{m}$, а $M_2 = 2s\mathrm{m}$. Тада се распореди укупно оптерећење дуж целе даске подељене на $2r+2s$ једнаких делова и у сваком од тих делова постави се оптерећење m. Првих $2r$ тегова представља M_1 и ако посматрамо само тај део, јасно је да је центар масе у средини. Слично и за преосталих $2s$ тегова. А центар масе система је наравно на средини. Доња слика представља случај када је $r=3$ и $s=1$.



Распоредили смо 8 малих тегова на подједнаком растојању и онда посматрали центар масе првих 6 и последња 2. Види се да је однос растојања до ослонца $1:3$, те је $a=1$ и $b=3$ овде. Архимед је потом разматрао случај да су M_1 и M_2 несамерљиви и претпоставио да не важи наведени однос. У том случају, ако би се тела поставила тако да растојања буду одговарајућа, једно би претегло и он би га заменио лакшим. Рецимо да је заменио M_1 са M_1'. Тада би потражио ново тело M_1'' тако да је $M_1' < M_1'' < M_1$, а које је самерљиво са M_2! Сада је случај свео на самерљиве и даљом анализом добија контрадикцију. У модерној терминологији, овде је Архимед користио чињеницу да се између свака два реална броја налази рационалан број и помоћу рационалних апроксимација добио резултат. Но, ово је он урадио у другим радовима, да се ми посветимо сфери, цилиндру и купи.



Поставимо произвољну раван која је нормална на осу HC и нека је она сече у тачки S. Она сече купу, сферу и цилиндар по круговима полупречника SR, SP и SN редом. Означимо их са k_1, k_2 и k_3. Архимед је приметио да ако кругове k_1 и k_2 поставимо у тачку H, они ће бити у равнотежи са кругом k_3 који остављамо на својој позицији, а тачка ослонца је A. То значи да треба проверити да је

$$(P(k_1)+P(k_2))\cdot AH = P(k_3)\cdot AS.$$

Ако је $x = AS$, а $AK = r$, онда је $SR = AS = x$,

$$SP^2 = KP^2 - SK^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2rx - x^2,$$

а $SN = 2r$, док је $AH = AC = 2r$. Тада је

$$(P(k_1)+P(k_2))\cdot AH = \pi(x^2+2rx-x^2)\cdot 2r = 4r^2\pi x, \text{ а } P(k_3)\cdot AS = \pi(2r)^2\cdot x = 4r^2\pi x.$$

Архимед онда закључује да ако купу и сферу поставимо у тачку H, тј. ако је у тој тачки концентрисана сва њихова запремина, то ће тачно бити у равнотежи ако цео цилиндар концентришемо у његово тежиште, које је у тачки K. Ако са V_1 означимо запремину купе, са V_2 сфере, а са V_3 цилиндра, добија се $(V_1+V_2)\cdot AH = V_3\cdot AK$. С обзиром да је $AH = 2AK$, добијамо

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}V_3.$$

Но, познато је да је $V_1 = \frac{1}{3}V_3$, те мора бити $V_2 = \frac{1}{6}V_3$. Запремина цилиндра је од раније позната: $V_3 = (2r)^2\pi\cdot 2r = 8r^3\pi$, те се тако добија запремина сфере $V_2 = \frac{1}{6}8r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$.

На аналогни начин, разматрајући друга тела, Архимед је добио запремине одсечака елипсоида, хиперболоида, параболоида, а и друге сличне резултате.

Архимед је у делу *О сфери и цилиндру* строго извео доказ формуле за запремину сфере (кугле), али видимо да је први пут до ње дошао оваквим разматрањима. У истом делу је извео и формулу за површину сфере: површина сфере је четворострука површина великог круга те сфере ($4r^2\pi$). Због немогућности квадратуре круга, Грци су имали, да тако кажемо, две основне површине – квадрата и круга, помоћу којих су изражавали остале. Тако је и Архимед површину сфере изразио помоћу површине круга.

Како је имао формуле за запремину и површину сфере, а такође те формуле за цилиндар, могао је да дође до резултата који му је био посебно драг. Наиме, ако посматрамо цилиндар описан око сфере, његова висина једнака је пречнику сфере, а база великом кругу сфере. Ако са r означимо полупречник сфере, тада је њена површина $4r^2\pi$, а запремина $\frac{4}{3}r^3\pi$. Но, површина цилиндра описаног око сфере је $2r^2\pi + 2r\pi\cdot 2r = 6r^2\pi$. Запремина цилиндра је $r^2\pi\cdot 2r = 2r^3\pi$. Имамо да је

$$V(S):V(C) = \frac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi = 2:3, \quad P(S):P(C) = 4r^2\pi : 6r^2\pi = 2:3.$$

Према легенди, Архимед је изразио жељу да му ови односи стоје на надгробној плочи.

Завршавамо преглед грчке математике кратком дискусијом о Диофанту и његовом делу.

Диофант

О Диофантовом животу практично ништа није познато. Претпоставља се да је живео и радио у Александрији око 250. године н. е. Сачуван је задатак, који нам открива колико дуго је живео:

Детињство Диофанта је потрајало шестину његовог живота, после још дванаестине му је порасла брада, оженио се после још једне седмине. Пет година после тога му се родио син, који је проживео половину животног века оца, а отац је, скрхан, умро после четири године.

Дакле, једначина која се ту појављује је:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

Лако налазимо да је $x=84$, тј. Диофант је проживео 84 године.

Од његових дела остао је део његове *Аритметике* и фрагмент дела *О многоугаоним бројевима*. Ми ћемо се овде позабавити *Аритметиком*. Од тринаест књига сматрало се да је сачувано само првих шест, но седамдесетих година XX века откривено је да су сачуване још четири књиге у арапском преводу и анализом је установљено да су то књиге од четврте до седме.

Аритметика се бави решавањем одређених и неодређених једначина са целобројним коефицијентима у којима се траже позитивна рационална решења. Оно што је важно да одмах напоменемо је да једначине нису ни формулисане ни решаване у геометријском руху, као што је била дуга традиција код Грка после открића несамерљивости, но се њима баратало алгебарски. Мада ћемо видети да се ту могу открити нека дубока геометријска значења (о којима Диофант експлицитно ништа није писао).

Развој алгебре се, у врло грубим цртама, дели на три периода. Најпре имамо период *реторичке* алгебре. Ту се и проблеми и решења формулишу речима, без икакве симболике. Други период је период *синкопатске* (или скраћеничке, ако нам се допусти такав термин) алгебре у којој се користе одређене скраћенице. Диофантово дело припада том периоду. Ту још није права *симболичка* алгебра која представља трећи период, који настаје знатно касније са Вијетом.

Диофант, пре свега, има ознаку за непознату (али само за једну!) и за њене степене до шестог, а користи и негативне степене исто до шестог. Постоји и ознака за јединице, за одузимање и за једнакост. Непознату ћемо означавати са s, пошто је и Диофант користио исту ознаку. Ево листе главних ознака.

1	$\mathring{M}$	$M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$	јединица
s	ς	$`A\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$	број
s^2	Δ^Y	$\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	квадрат (степен)
s^3	K^Y	$K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$	куб
s^4	$\Delta^Y\Delta$	$\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	квадрат × квадрат
s^5	ΔK^Y	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$	квадрат × куб
s^6	K^YK	$K\acute{\upsilon}\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$	куб × куб

Као што видимо, за ознаку непознате, Диофант је користио последње слове речи 'аритмос', што значи број (иначе ς је сигма, али се овако пише на крају речи, тзв. 'завршна сигма'). Као што смо раније навели, разломак $\frac{1}{n}$ би се писао као n', па је и Диофант користио ту ознаку: $\frac{1}{s} = \varsigma'$, али се може наћи и ознака ς^χ, у зависности од издања *Аритметике*. Ознака за једнакост је била ι (што је почетак речи која значи 'једнако'), док је за одузимање коришћен симбол ⋔. За сабирање није постојао посебан симбол, просто су се низали симболи. Део тога је био да је на свакој страни једнакости био израз облика $A-B$, где су у A и B били нанизани симболи, дакле то су биле суме позитивних израза. На пример, једнакост

$$3s^2 + 12 = 4s,$$

би била записана овако:

$$\Delta^Y\gamma\mathring{M}\iota\beta\iota\varsigma\delta.$$

Подсетите се како су писани бројеви (словима, као што је наведено раније). Да ли је Диофант 'признавао' негативне бројеве? Већи део аутора сматра да није. Наиме, он јесте описивао како се врше операције, али то је више био опис како баратати са изразима облика $A-B$, како их сабирати, која су правила за множење. Дакле, знао је да је $(A-B)(C-F) = (AC+BF)-(AF+BC)$, али није експлицитно радио са негативним бројевима. Чини се да је то необично, али математика се не развија онако како је презентирана у уџбеницима.

Диофант је објашњавао и сређивање израза на супротним странама једнакости, како су се на обе стране додавали једнаки изрази да би нестали негативни делови и како су се после скраћивали 'вишкови'. То тачно одговара правилима ал-џабр и ал-мукабала које је касније користио ел Хорезми. На пример, ако имамо једначину

$$3s^3 + 4s - 15 = 15s + 3 - 5s^2,$$

онда најпре додајемо $5s^2 + 15$ на обе стране и добијамо

$$3s^3 + 5s^2 + 4s = 15s + 18,$$

(ал-џабр), а потом скраћујемо (ал-мукабала):

$$3s^3 + 5^2 = 11s + 8.$$

Занимљиво је рећи да се симбол за непознату који је Диофант користио, може наћи и у грчком папирусу, који је познат као Мичиген 620, а који највероватније потиче из II века н. е. Заправо, методе које Диофант примењује за решавање одређених једначина (које имају јединствено позитивно рационално решење) нису суштински нове, познате су из месопотамске математике. Но, Диофант даје образложења онога што ради.

Формулација проблема и поступак решавања код Диофанта типично изгледају овако. Он формулише проблем, који укључује више бројева који се траже (дакле, проблем у старту има више непознатих). Потом, уколико је неопходно, наводи потребне услове који морају да важе да би постојала позитивна рационална решења. За само решавање проблема, Диофант бира конкретне бројеве, а потом тражи решења у облику у коме се сва могу изразити преко једне непознате и то у облику да су неки услови обавезно задовољени, док се други користе да се нађе решење.

Почнимо од једноставнијих (из прве књиге).

27. Наћи два броја за које су њихова сума и њихов производ задати бројеви.

Потребан услов: квадрат половине суме мора бити већи од производа за број који је квадрат.

Дакле, проблем је да се реши систем једначина

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b, \end{aligned}$$

где су a и b задати бројеви при чему се тражи да је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = c^2$, где је c неки (рационалан) број.

Видимо да се проблем своди на решавање квадратне једначин $z^2 - az + b = 0$. Дискриманта је $a^2 - 4b = 4c^2 = (2c)^2$ и видимо да се добијају рационална решења.

28. Наћи два броја за које су њихова сума и збир њихових квадрата задати бројеви.

Потребан услов: Двострука сума њихових квадрата мора премашити квадрат њихове суме за квадрат.

Било би добро да се читаоци увере да потребан услов обезбеђује постојање рационалног решења.

Чести су задаци код Диофанта где је дата сума или разлика два тражена броја. Он поступа као у Месопотамији: ако је задато да је $x+y=a$, он поставља $x=\frac{1}{2}a-s, y=\frac{1}{2}a+s$ и даље то убацује у преостали услов. У случају да је дато $x-y=a$, онда је $x=s+\frac{1}{2}a, y=s-\frac{1}{2}a$ и то се поставља у преостали услов.

На пример, у проблему 28, Диофант конкретно тражи да се реши систем

$$\begin{aligned} x+y &= 20 \\ x^2+y^2 &= 208. \end{aligned}$$

Ево како он то решава.

Нека је разлика тих бројева $2s$. Дакле, већи број је $10+s$, а мањи $10-s$. Остаје да се учини сума њихових квадрата једнаком 208. Но, сума њихових квадрата је $2s^2+200$. Како то мора бити једнако 208, добијамо да s мора бити једнако 2. То значи да је већи број 12, а мањих број 8.

Позабавимо се сада сложенијим типом проблема и методом његовог решавања.

20. (из друге књиге) Наћи два броја тако да квадрат сваког од њих када се дода другом даје квадрат.

Ево решења:

Нека је први број s, други $2s+1$. Тада квадрат првог сабран са другим даје квадрат. Квадрат другог сабран са првим даје $4s^2+5s+1$. Ово мора бити једнако квадрату. Формирам квадрат од $2s-2$, који је $4s^2+4-8s$ и s је 3/13. Први број је 3/13, други 19/13.

Овде на делу видимо оно о чему смо причали. Диофант има две непознате и обе изражава преко једне тако да је један од услова задовољен за све вредности непознате. Потом задовољава други услов на одређени начин. Проблем који му се појављује је следећи: наћи рационалне бројеве s и t тако да је

$$as^2+bs+c=t^2, \tag{1}$$

где су a, b и c задати, наравно рационални, бројеви. Једначином (1) задата је једна крива другог реда. Проблем који Диофант разматра састоји се заправо у налажењу РАЦИОНАЛНИХ ТАЧАКА на овој кривој.

Наводимо четири метода које Диофант користи при разматрању једначине (1).

Први метод. Ако је a квадрат (рационалног броја), $a = e^2$, Диофант поставља $t = es + m$, где се m бира да даје позитивно решење. Видимо да се једначина (1) своди на ($e^2 = a$):

$$as^2 + bs + c = e^2 s^2 + 2esm + m^2,$$

тј. добија се линеарна једначина по s. Ово је случај који се појављује у горенаведеном проблему.

Други метод. Ако је c квадрат, $c = f^2$, онда Диофант поставља $t = ms + f$ и добија једначину

$$as^2 + bs + f^2 = m^2 s^2 + 2msf + f^2,$$

што после сређивања даје рационално решење за s.

Трећи метод. Он се примењује у случају да немамо линеарни члан у (1), тј. да је у питању једначина облика $as^2+c = t^2$ и да је $a+c$ квадрат. Диофант овај метод објашњава у леми која претходи проблему 12 у десетој књизи.

За дата два броја чија је сума квадрат, бесконачан број квадрата се може наћи тако да када се квадрат помножи једним од тих бројева и производ дода другом, резултат је квадрат.

Другим речима, Диофант тврди да ако су a и c такви да је $a + c$ квадрат (рационалног броја, да се подсетимо), онда постоји бесконачно много (рационалних бројева) x таквих да је ax^2+c квадрат (рационалног броја). Заправо, он ради следеће: поставља $x = s+1$ и добија једначину

$$as^2 + 2as + (a + c) = y^2,$$

која се сада може решити другом методом, јер је слободни коефицијент $a+c$ квадрат. Он овај метод оправдава доказом за конкретан случај $a = 3$, $c = 6$, али није тешко видети да идеја 'пролази' и у општем случају.

Четврти метод. Овај метод Диофант објашњава у леми која је везана за проблем 15 у десетој књизи. Он разматра једначину

$$ax^2 - c = y^2 \tag{2}$$

и тврди да, ако имамо једно решење ове једначине, на пример, $x = d$, $y = e$, онда се увек може наћи још неко решење. Он то показује тако што постави

$$x = d + s, \quad y = e + ms. \tag{3}$$

Заменом у (2) добија се

$$ad^2 + 2ads + s^2 = e^2 + 2ems + m^2 s^2,$$

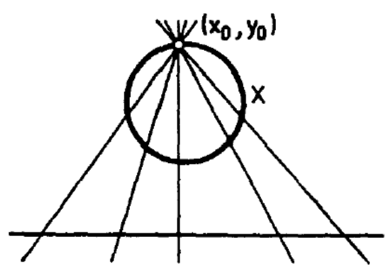
тј.
$$2ad + s = 2em + m^2 s,$$
одакле се лако добија s.

Једначина (2) је једначина хиперболе. Једначине (3) заправо задају параметарску једначину праве која пролази кроз једну тачку (d, e) ове хиперболе и потом је сече у још једној тачки.

Пажљив читалац, који је, уз то, био врло вредан када је спремао Анализу 1, приметио је везу претходно наведених метода и Ојлерових смена које се примењују за рачунање интеграла облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција (погледајте неку од збирки или уџбеника за Анализу 1). Ово није необично, заправо суштина је у дискусији о четвртом методу. Наиме, права и недегенерисана крива другог реда су бирационално еквивалентне – могуће је наћи 'скоро' бијекцију између њих, бијекцију која се остварује рационалним функцијама када се избаци коначно много тачака. На пример, баш постављањем праве кроз задату тачку на криву и налажењем, за различите коефицијенте правца, друге пресечне тачке праве и криве.



На цртежу можемо видети како пројектујемо криву другог реда на праву (са криве смо избацили једну тачку). Ова еквиваленција између праве и криве другог реда је 'одговорна' и за чињеницу да је смена променљиве $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ корисна код рачунања интеграла облика

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција, но то је друга прича.

У петој књизи, Диофант разматра једначине вишег степена. И ту се могу наћи сличне и занимљиве идеје. Но, како за криве трећег реда не важи претходно наведено својство, заправо је структура рационалних тачака само у неким ситуацијама правилна, не могу се резултати добијати на исти начин. Ипак, неки аутори у Диофантовим методама препознају имплицитно налажење тангенти на такве криве, а и налажење треће пресечне тачке кроз две дате. Но, ми се нећемо овде тиме дубље бавити.

Десета књига је у потпуности посвећена Питагориним тројкама рационалних бројева, тј. рационалним решењима једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Заправо се ту говори о правоуглим троугловима са рационалним странама, а задаци укључују везе између површина, дужина катета и слично. Ова књига је занимљива, јер је у својој копији издања из 1621. године Пјер де Ферма исписивао коментаре о резултатима Диофанта и ту налазимо његову напомену (после задатка о разлагању на два начина датог квадрата у облику суме два квадрата):

Напротив, немогуће је разложити куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и, уопште, ма који степен већи од два на збир два таква степена. Нашао сам чудесан доказ овога, али су маргине сувише уске за њега.

Ретко ко, заправо верује, да је Ферма уистину имао овакав доказ. Ово тврђење је познато као Велика Фермаова теорема (или Фермаова последња теорема) и доказ је тек деведесетих година прошлог века дао енглески математичар Ендрју Вајлс.

Диофант има још неке занимљиве методе за решавање једначина, но ми немамо времена да се и њима бавимо у овом прегледу. У случају одређених једначина (дакле оних које имају највише коначно много рационалних решења) Диофант се углавном ослања на старију традицију. Но, у случају неодређених једначина, тј. оних које имају бесконачно много рационалних решења, његов допринос је изузетан. Његово дело је извршило значајан утицај на математичаре каснијих епоха и довело до појављивања изузетних проблема, као и нових математичких области (попут диофантовске анализе).