

# Грчка математика 2

Зоран Петровић

11. март 2022.

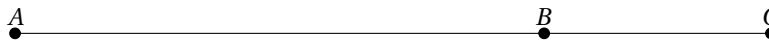
## Несамерљивост

Као што смо видели, идеја Питагорејаца је била да се сваком објекту придружи неки природан број. Дакле, однос ма која два објекта, ма које две величине мора бити описан као однос два природна броја. Проблем је у томе што то ипак није тако и до тог открића је дошло половином V века п. н. е. Традиција ово откриће приписује већ раније споменутом Хипасу из Метапонта.

Прво спомињање проблема несамерљивости појављује се у Платоновом дијалогу *Теетет*, који је Платон написао 368. или 367. године п. н. е, а догађаји описани у том дијалогу се фиктивно приписују години 399. У том дијалогу наводи се да је стари математичар Теодор из Кирене (грчка колонија у данашњој Либији) доказивао групи младића, међу којима је и Теетет, који је описан као седамнаестогодишњак, да су квадратни корени бројева  $3, 5, \dots, 17$  (сем наравно 9) ирационални бројеви. Занимљиво је да се овде не наводи доказ да је  $\sqrt{2}$  ирационалан број. Очигледно је да се сматрало да је у то време ово била добро позната чињеница, коју није требало образлагати.

Доказ ирационалности броја  $\sqrt{2}$  који смо учили у средњој школи је мало поједностављен доказ који наводи још Аристотел. Он се везује за чињеницу да су дијагонала и страница квадрата несамерљиви. Шта то значи? Ако са  $d$  обележимо дијагоналу квадрата, а са  $a$  страницу квадрата, то значи да не постоји дуж  $l$  таква да је  $d = ml$ , а  $a = nl$  за неке природне бројеве  $m$  и  $n$ .

Како се уопште испитује да ли таква дуж постоји? Другим речима, пошто су Питагорејци свакако веровали да су ма које две величине, па ето и дужи, самерљиве, како се налази та дуж којом се обе могу премерити — њихова заједничка мера. Користи се прастари занатски трик. Замислимо да имамо две траке и желимо да нађемо њихову заједничку меру. Њих ћемо наравно приказати помоћу дужи. Дакле, имамо дужи  $AB$  и  $BC$ :



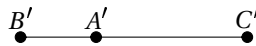
Сада краћу траку преклопимо преко дуже (мањом покушавамо да премеримо дужу)



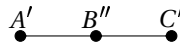
Поступак поновимо:



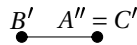
Нисмо успели, но сада оним што је остало покушавамо да премеримо мању ( $B'C' = BC$ ):



Понављамо:



И још једном:



Успели смо да добијемо заједничку меру — то је дуж  $B'A' = AB'$ . Ако се овај поступак никада не би завршио почетне дужи (траке) би биле несамерљиве.

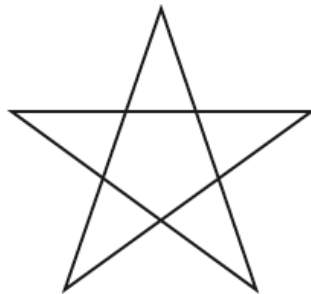
Погледајмо како ‘иде’ тај стари доказ несамерљивости дијагонале и странице квадрата (овај доказ се може наћи у неким издањима Еуклидових *Елемената* при крају X књиге, но опште је мишљење да он није ту био у оригиналу и да је то касније додато).

Нека је  $ABCD$  квадрат и  $AC$  његова дијагонала. Показујемо да су дијагонала  $AC$  и страница  $AB$  несамерљиве по дужини. Претпоставимо да оне јесу самерљиве. Показаћемо да је тада један број истовремено и паран и непаран. Јасно је да је квадрат над  $AC$  једнак двоструком квадрату над  $AB$ . Како су по претпоставци дијагонала и страница самерљиве, оне су у пропорцији као два цела броја. Нека је то пропорција  $DE:F$ , где су  $DE$  и  $F$  најмањи бројеви који остварују ту пропорцију.  $DE$  не може бити јединица пошто би у том случају, како је  $AC > AB$  добили да је  $F$  цео број који је мањи од 1, што није могуће. Дакле,  $DE$  није јединица, него неки цео број (већи од 1). Како је  $AC:AB = DE:F$ , следи да је такође  $AC^2:AB^2 = DE^2:F^2$ . Но,  $AC^2 = 2AB^2$  и стога је  $DE^2 = 2F^2$ . Дакле,  $DE^2$  је паран број, па стога и  $DE$  мора бити паран број. Јер, ако би био непаран број, његов квадрат би такође био непаран број. Наиме, ако се неки број непарних бројева сабере и ако у том збиру има непарно много бројева, онда је и тај збир непаран. Стога је  $DE$  такође паран број. Нека је онда  $DE$  подељено на два једнака броја у тачки  $G$ . Како су  $DE$  и  $F$  најмањи бројеви

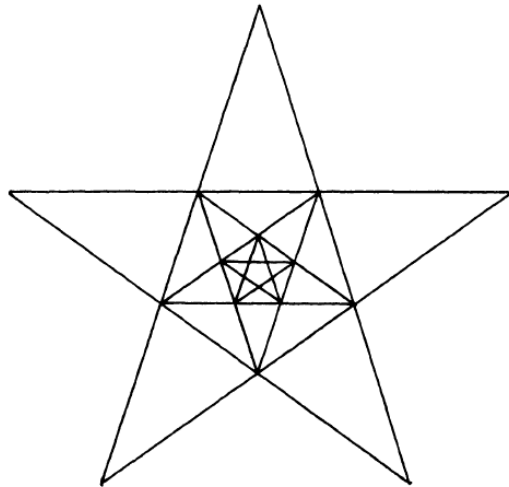
који су у наведеној пропорцији, они су узајамно прости. Стога, како је  $DE$  паран број,  $F$  мора бити непаран. Јер, ако би он био паран број, онда би број 2 мерио и  $DE$  и  $F$ , а то је немогуће јер су они узајамно прости. Стога  $F$  није паран него је непаран. Како је  $ED = 2EG$  следи да је  $ED^2 = 4EG^2$ . Но,  $ED^2 = 2F^2$  и стога је  $F^2 = 2EG^2$ . Стога  $F^2$  мора бити паран број те је  $F$  такође паран број. Но, такође је показано да  $F$  мора бити непаран број, што је немогуће. Стога следи да  $AC$  не може бити самерљиво са  $AB$  што је и требало показати.

Добро, ако се занемаре неке специфичности, које продужавају доказ, попут тога да се инсистира да се посебно докаже да  $DE$  не може бити 1, као и мало развученог доказа чињенице да је квадрат непарног броја непаран број, а и асиметрије у ознакама, где се користи, с једне стране  $DE$ , а с друге само  $F$  (а види се и зашто је то тако —  $DE$  се дели на два половине, а  $F$  не), то је доказ који смо имали у средњој школи. Јасно је да је овај доказ прилично софистициран, користи се ту свођење на апсурд у више корака и, као што се каже, ради се о 'слегнутом' доказу, који сигурно као такав није могао да се појави у петом веку пре нове ере. Дакле, није то доказ у коме се први пут показала несамерљивост дужи.

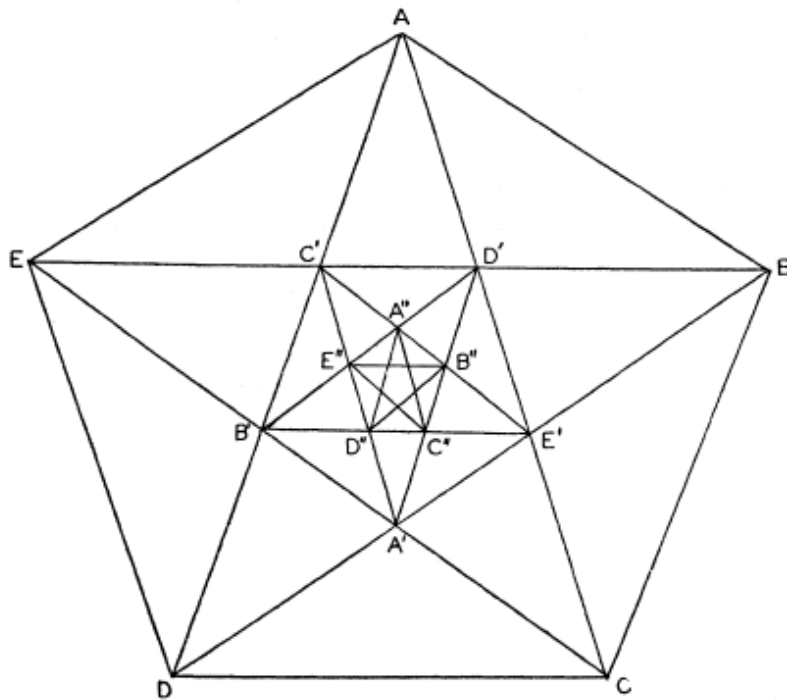
Први доказ несамерљивости се везује, као што смо већ навели, за Хипаса из Метапонта и сматра се да је он пронађен средином V века п. н. е. Присетимо се пентаграма:



Већ смо рекли да је то био важан симбол за Питагорејце. Њега формирају дијагонале правилног петоугла, но јасно је да се у центру ове звезде налази још један правилни петоугао (и не само један...):



Видимо опадајући низ правилних петоуглова. Доцртајмо почетни правилни петоугао и означимо темена ових петоуглова.



Већ смо навели да је Талесу била позната чињеница о једнакости углова на основици једнакокраког троугла, наравно да је и Питагорејцима то било познато. Као и обратно тврђење — да из једнаких углова добијамо и једнаке странице. Вероватно им није био познат доказ који би ‘прошао’ садашњу логичку проверу, но било им је јасно да то важи. Еудем у својој историји наводи да су знали да је збир углова у троуглу био једнак двоструком правом углу. Одавде, поделом петоугла на троуглове, а знамо да су их такве поделе занимале, лако се добија колики је збир унутрашњих углова у петоуглу, па и чињеница да је збир спољашњих углова једнак четвороструком правом углу. Наравно, као што је већ наведено раније, била је позната и једнакост унакрсних углова.

Све ово је било довољно да Хипас може да закључи да је  $AE = AB'$  и  $B'D = B'E'$  те је  $AD - AE = B'E'$ . Дакле, разлика дужина дијагонале и странице великог петоугла једнака је дужини дијагонале мањег. Док је слично  $AE = ED' = EA'$  и  $B'E' = B'D = B'E$  те стога и  $AE - B'E' = B'A'$ , те је разлика дужине странице већег и дијагонале мањег једнака дужини странице мањег петоугла. Наравно да се овај поступак наставља. Ако са  $d_n$  означимо дужину дијагонале  $n$ -тог правилног петоугла, а са  $a_n$  дужину његове странице, онда имамо да је

$$d_{n+1} = d_n - a_n, \quad a_{n+1} = a_n - d_{n+1}, \quad \text{за све } n.$$

Но, поступак налажења заједничке мере  $d_1$  и  $a_1$ , који смо раније описали се управо у томе и састоји: налазимо  $d_1 - a_1$  и пошто је то мање од  $a_1$ , онда од  $a_1$  одузимамо тај резултат и тако настављамо. Дакле, добијамо низ  $d_1, a_1, d_2, a_2, \dots$ . Према томе, овај процес се никада не завршава те дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве. Уосталом, ако би  $l$  била заједничка мера за  $d_1$  и  $a_1$ , онда би она мерила све ове странице и дијагонале, а то није могуће јер је јасно да се оне све више и више смањују и за довољно мали петоугао сви ови елементи ће бити краћи од  $l$ .

Дакле, видимо да је прилично очигледно да дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве и да се, што би се рекло, „све види са слике”. Слике која је била изузетно значајна Питагорејцима. Наравно да се нешто слично може извести и за дијагоналу и страницу квадрата, али ту немамо тако природно формирану слику, нити је доказ који смо навели за ирационалност  $\sqrt{2}$  таквог карактера. Стога се са великом сигурношћу може закључити да се несамерљивост, која је била велики шок за Питагорејце, а имала и врло озбиљне последице по каснији развој грчке математике, први пут установила у случају дијагонале и странице правилног петоугла.

## Зенонови парадокси

За оснивача Елејске школе сматра се Парменид. Основна идеја његовог учења била је: јединственост и непроменљивост. Свако кретање је илузија – разликујемо оно што је суштинско, стварно, од онога што је чулно. Ово гледиште су критиковали, па и исмевали Питагорејци. Стога је Зенон (око 450. г. п. н. е.), Парменидов ученик, смислио више логичких парадокса који су имали за циљ да покажу да је и питагорејско учење о променама и вишеструкостима такође проблематично.

Прва два парадокса тичу се дискретности/континуираности простора.

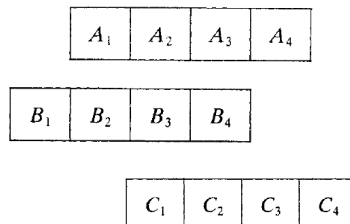
**1. Дихотомија** Да би било ко прешао неко растојање, он најпре мора да пређе половину тог растојања, а да би прешао ту половину, мора најпре четвртину итд. Стога би он морао да пређе бесконачно много делова у коначно време.

**2. Ахил и корњача** Ахил је наравно бржи од корњаче. Стога јој он у трци да неку предност. Но, док Ахил стигне до места где је била корњача, она је отишла мало даље. Док стигне до тог следећег места, она је опет мало одмакла. Стога Ахил никада не може да стигне корњачу.

Друга два говоре исто о времену.

**3. Стрела** Стрела која путује у сваком тренутку заузима одређену позицију у простору. То значи да се у било ком тренутку она не креће. Ако се не креће у било ком тренутку, она се уопште и не креће.

**4. Стадион** Нека постоји најкраћи временски интервал. И нека је то интервал у коме одређени објекат који се креће прође једно место (видети слику):



Посматрамо три објекта – један је непокретан ( $A$  – трибине на стадиону), а други се крећу, али у супротним смеровима –  $B$  слева удесно, а  $C$  здесна улево. Проблем је у томе што када  $B$  прође непокретни  $A$  за једно место, а  $C$  исто  $A$  за једно место, добијамо:

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$

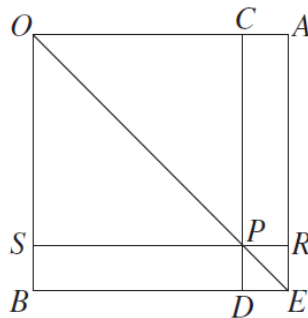
Видимо да је  $B$  у односу на  $C$  прошло за два места. Тако да тај тренутак не може бити најкраћи.

По свему судећи, Зенонови аргументи, као и откриће несамерљивих величина су имали веома дубок утицај на развој грчке математике. У раније време су се величине код Питагорејаца представљале каменчићима, но код Еуклида ћемо већ видети да се све величине, па чак и природни бројеви представљају дужима. Геометрија је преузела примат у односу на бројеве.

Утицај је био толико велики да се код једначина почела захтевати хомогеност – код система једначина које су у Месопотамији без проблема, а и без брига, решавали:

$$xy = A, \quad x + y = b,$$

код Грка се захтевало да  $A$  буде површина, а  $b$  дуж. Ово је остало, под утицајем Грка, веома дуго у математици. Чак се пропорција избегавала и код решавања линеарних једначина:  $ax = bc$  се посматрало као једнакост површина, а не као једнакост  $a : b = c : x$ . За решавање се, дакле, није користила сличност, већ једнакост површина.



Конструисао би се правоугаоник  $OCDB$  чије су стране  $b = OB$  и  $c = OC$  и онда би се дуж  $OC$  поставила дуж  $OA = a$ . Затим би се комплетирао правоугаоник  $OAEB$  у коме дијагонала  $OE$  сече  $CD$  у тачки  $P$ .

Како је  $P(\triangle AOE) = P(\triangle BOE)$ ,  $P(\triangle RPE) = P(\triangle DPE)$  и  $P(\triangle OSP) = P(\triangle COP)$  (одговарајући троуглови су наравно подударни, стога и имају исте површине), то је  $P(SBDP) = P(ACPR)$  и, коначно,  $P(COBD) = P(OSRA)$ , тј.  $bc = aCP$ , те тако добијамо да је  $x = CP$ .

Питагорејци су имали још утицаја. Архита из Тарента (југ данашње Италије) је увео КВАДРИВИЈУМ: аритметика, геометрија, музика, астрономија (знамо да је музика била значајна Питагорејцима). Уз касније додавање ТРИВИЈУМА: граматика, реторика и логика, имамо основу за образовање на Западу у току наредних скоро 2000 година.

Осим овога, Платон је учио из књиге Питагорејца Филолаја и та књига је на њега извршила велики утицај. Без обзира на то што се за Питагорејце не би могло рећи да су били идеалисти у филозофији, испоставило се да су они имали велики утицај на идеалисту Платона. Не би се могло рећи да је сам Платон имао неких математичких резултата, али је математика имала врло важно место у његовој Академији. Што је сигурно под утицајем Филолаја, јер оно мало што се о математици може наћи у изрекама Сократа је више негативно него позитивно. У сваком случају, на вратима Платонове Академије у Атини стајале су речи: „Нека овде не улази нико ко не зна геометрију.” Значајни математичари су похађали Платонову Академију.

## Еудокс и метод исцрпљивања

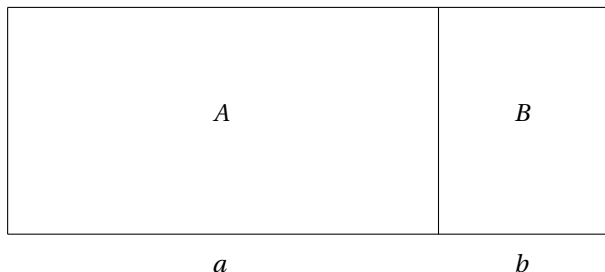
Како упоређивати несамерљиве величине? Рано решење овог проблема је изузетно занимљиво. Наиме сматрало се да су величине  $a, b, c, d$  у пропорцији

$$a : b = c : d,$$

ако се у поступку у коме се за  $a$  и  $b$  тражи заједничка мера добијају исти бројеви као у поступку за  $c$  и  $d$ . Ово ‘ради’ и у случају када су  $a$  и  $b$  (односно  $c$  и  $d$ ) самерљиви, а и када нису. Само се мора десити да алгоритам даје исте бројеве.

Добра је илустрација то да су правоугаоници истих висина у истој пропорцији као и њихове основе. Наиме,





јасно је да се у покушају налажења заједничке мере за  $a$  и  $b$  исти број пута врши одузимање у сваком кораку, као и у налажењу заједничке мере за  $A$  и  $B$ , без обзира на то да ли ће се поступак завршити после коначно много корака или не. На овај начин се, дакле, могу поредити и односи несамерљивих величина.

Но, била је потребна боља формулација. Она потиче од Еудокса, који је био студент у Платоновој Академији. Налазимо је у V књизи Еуклидових *Елемента* (дефиниција 5). Наравно, тамо је наведена речима, ми је можемо краће и јасније овако исказати.

Величине  $a, b, c, d$  су у пропорцији  $a : b = c : d$  ако и само ако је за све позитивне целе бројеве  $m$  и  $n$  тачно: уколико је  $ma < nb$ , онда је и  $mc < nd$ , а ако је  $ma = nb$ , онда је и  $mc = nd$ , а ако је  $ma > nb$ , онда је  $mc > nd$ .

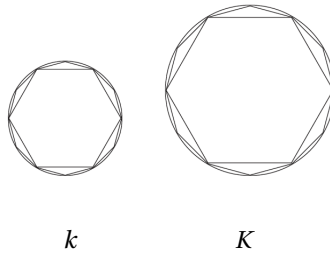
Како налазити површину криволинијских фигура? Чини се да је и раније постојала идеја да се у и око неке криволинијске фигуре уписују, односно описују праволинијске фигуре и да се тако повећавањем броја страница приближимо површини криволинијске фигуре. Но, наравно да је појам лимеса био непознат, а тиме и решење проблема није било лако доступно. На основу онога што је писао Архимед, Еудокс је био тај који је дао аксиому, коју данас знамо под именом Архимеда, аксиому непрекидности. Она каже да ако неке две величине имају однос (што значи да ниједна није једнака нули и да су оне упоредиве), онда се увек може наћи умножак једне који је већи од оне друге. То решава и проблем који је занимао математичаре – који је то угао који тангента на криву заклапа са самом кривом. Чини се да то није нула, а опет . . . Тај криволинијски угао просто не задовољава Еудоксову аксиому у односу на праволинијске углове.

Изведена из овог метода је и грчка МЕТОДА ИСЦРПЉИВАЊА (израз који Грци уопште нису користили, али се одомаћио у савременој математици):

Ако се од неке величине одузме бар њена половина, па се од остатка одузме бар његова половина и ако се тај поступак настави, онда се може доћи до величине која је мања од ма које унапред задате величине.

Сада ћемо показати како је, сматра се, баш Еудокс, доказао да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника.

Нека су то кругови  $k$  и  $K$ , њихове површине  $p$  и  $P$ , њихови полупречници  $r$  и  $R$ .



Желимо да докажемо да је

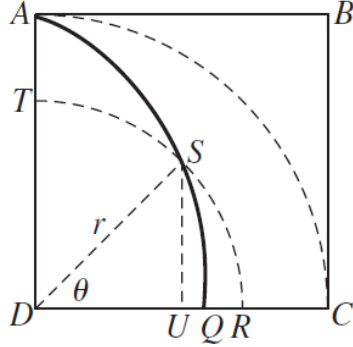
$$p/P = r^2/R^2.$$

Претпоставимо да је  $p/P > r^2/R^2$ . Тада постоји величина  $p'$  мања од  $p$  таква да је  $p'/P = r^2/R^2$ . Нека је  $\varepsilon = p - p'$ . Унутар кругова  $k$  и  $K$  можемо уписивати правилне многоуглове који имају исти број страница  $n$  и површине  $p_n$  и  $P_n$ .

Није тешко уверити се да се разлика између површина круга и површине уписаног многоугла смањује бар за пола њене вредности ако удвостручавамо број страница. То значи да ћемо после извесног времена добити многоугао са  $m$  страница за који је  $p - p_m$  мање од  $\varepsilon$ . Тако добијамо да је  $p_m > p'$ . Познато је да је  $p_m/P_m = r^2/R^2$ . Стога је  $p_m/P_m = p'/P$ . Како је  $p_m > p'$  добија се да је и  $P_m > P$ , што је бесмислено јер је  $P_m$  површина многоугла који је уписан у круг  $K$ . На исти начин се долази до контрадикције ако се претпостави да је  $p/P < r^2/R^2$ . Закључујемо да мора бити  $p/P = r^2/R^2$ .

## Динострат и квадратура круга

Ученик Еудокса Менем и његов брат Динострат такође су имали значајне резултате. Менем се бавио конусним пресецима, док је Динострат искористио Хипијину трисектрису да изврши квадратуру круга (те се, стога, та крива назива и квадратрисом). Погледајмо како је то урадио.



Диностратов резултат је да важи следеће:

$$\widehat{AC} : AB = AB : DQ. \quad (1)$$

Претпоставимо да ово није тачно и нека је  $\widehat{AC} : AB < AB : DQ$ . Тада је  $\widehat{AC} : AB = AB : DR$ , где је  $DR > DQ$ . Нека круг са центром у  $D$  и полупречником  $DR$  сече трисектрису у тачки  $S$  и страну  $AD$  у тачки  $T$ . Нека је подножје нормале из  $S$  на  $DC$  означено са  $U$ . Познато је било да се лукови који одговарају истим угловима односе као што се односе полупречници тих кругова, те је  $\widehat{AC} : \widehat{TR} = AB : DR$  и следи  $\widehat{AC} : AB = \widehat{TR} : DR$ . Како је, по хипотези,  $\widehat{AC} : AB = AB : DR$ , добијамо да је  $\widehat{TR} = AB$ . На основу особина трисектрисе  $\widehat{TR} : \widehat{SR} = BC : SU = AB : SU$  и стога следи да је  $\widehat{SR} = SU$ , што није могуће јер је дужина нормале из  $S$  на  $DC$  мања од дужине ма које друге криве од  $S$  до тачке на  $DC$ .

На сличан начин се разрешава и случај  $\widehat{AC} : AB > AB : DQ$ , те закључујемо да мора бити  $\widehat{AC} : AB = AB : DQ$ . На основу овога, можемо да конструишемо дуж чија је дужина једнака  $\widehat{AC}$ . Но, то је четвртина кружнице и онда није тешко конструисати и квадрат чија је површина једнака површини круга са центром у  $D$  и полупречником  $DC$ .

Нама данас није тешко да одредимо једначину трисектрисе у поларним координатама. Добијамо

$$\pi r \sin \theta = 2a\theta,$$

ако је  $a = AB = DC$ . Наиме, у поларним координатама је  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ . Но, из својстава трисектрисе, која смо већ користили горе, имамо да је

$$\frac{\theta}{\pi/2} = \frac{y}{a}.$$

Дакле,  $\pi y = 2a\theta$  и, како је  $y = r \sin \theta$ , добијамо горенаведену једначину. Одавде лако добијамо координате тачке  $Q$  (имамо ту, додуше лимес, али већ смо рекли да се та тачка и не појављује на кривој као пресек

те две дужи):  $\pi r = 2a$ , те је  $x = r \cos 0 = r = \frac{2a}{\pi}$ . Није тешко видети да се добија исто што и у једначини (1).

## Еуклид

После смрти Александра Великог, дошло је до борбе за власт међу његовим генералима, територија је подељена на три дела, а власт у Египту је била у рукама династије Птолемеја. У Александрији су основане две значајне институције – Музеј (који је заправо био институт у савременом смислу) и Библиотека. Многи значајни мислиоци су дошли у Александрију и ту је сада био центар науке.

Један од тих учених људи био је и Еуклид (око 300 г. п. н. е). Занимљиво је да се о њему зна врло мало, чак се не зна ни место у коме је рођен, ни где се школовао, али се сматра да је учио са Платоновим студентима, ако и није био у самој Академији.

Нису сва Еуклидова дела сачувана. Између осталих, изгубљене су и његове књиге о конусним пресецима, које Архимед наводи и које користи. Но то дело, као и једно раније о конусним пресецима, касније је било превазиђено захваљујући Аполонијевим радовима о конусним пресецима.

Пет Еуклидових дела су сачувана: *Елементи*, *Подаци*, *Дељење фигура*, *Феномени* и *Оптика*. Пре озбиљније дискусије о *Елементима* кратко ћемо се позабавити овим осталим делима.

*Оптика* је заправо посвећена раној математичкој теорији перспективе. У њој Еуклид излаже своју теорију директног виђења (дакле без преламања и рефлексије зрака светлости) по којој око шаље зраке који путују до објекта. У делу користи резултат, који се на више места појављује у старим делима, да је  $tg \alpha < tg \beta$  ако је  $0 < \alpha < \beta$ .

Дело *Дељење фигура* је сачувано само у арапским преводима у којима су изостављени неки докази као лаки. Наравно, оно је касније преведено на латински, а потом и на друге европске језике. Састоји се од 36 ставова у којима се разматрају разне поделе равних фигура. На пример, у ставу 1 се тражи да се нађе права паралелна једној страници троугла која тај троугао дели на два дела исте површине, док се у ставу 4 тражи права која је паралелна основицама трапеза, а полови га. Последњи став тражи поделу четвороугла у датом односу правом која пролази кроз дату тачку на једној од страница тог четвороугла.

Еуклидово дело *Подаци* по свему судећи је настало као додатак *Елементима*. Садржи 95 тврђења која се тичу налажења разних величина,

геометријских правила о паралелним правим и пропорционалним величинама. Нека од тврђења су еквивалентна решавању квадратних једначина. На пример, тврђења 84 и 85 су геометријска верзија месопотамских метода за решавање система једначина  $x^2, x \pm y = b$ .

Позабавимо се сада главним Еуклидовим делом, његовим *Елементима*.

Еуклидови *Елементи* нису прво дело са тим насловом. Зна се за још три ранија таква дела, једно од њих и од Хипократа са Хиоса. Но, она нису сачувана. *Елементи* су уџбеник елементарне математике. Састоји се од тринаест књига (данас би се то пригодноје могло назвати главама, али користимо традиционалну терминологију). Првих шест књига посвећено је геометрији у равни, следеће три теорији бројева, десета несамерљивим величинама и последње три скоро у целости геометрији простора.

На почетку књиге дате су 23 дефиниције. Проблем са овим дефиницијама је у томе што оне не дефинишу појмове на основу већ познатих, једноставнијих појмова. Рецимо, дефиниција тачке је ‘оно што нема делова’, дефиниција праве: ‘дужина без ширине’. То свакако нису дефиниције у правом смислу те речи, могло би се рећи да је то покушај неког појашњења, можда под утицајем Платона.

После ових дефиниција следи пет постулата и пет аксиома (или општих истина). Разлика би требало да буде у томе што су аксиоме опште, односе се на све области, док су постулати специфично геометријски.

Постулати

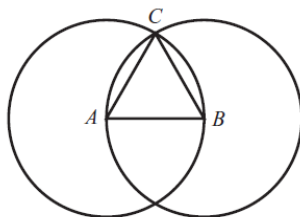
1. Могуће је нацртати праву линију од било које тачке до било које тачке.
2. Коначна права линија може се продужити у праву линију.
3. Може се описати круг са било којим центром и било којим полупречником.
4. Сви прави углови су међусобно једнаки.
5. Уколико права линија сече друге две праве линије и ако је збир унутрашњих углова са једне стране мање од збира два права угла, онда се, ако се те праве линије продуже неограничено, оне секу са те стране са које је збир тих углова мањи од два права угла.

## Аксиоме

1. Ствари које су једнаке истој ствари једнаке су и међу собом.
2. Ако једнаким додате једнаке, целине су једнаке.
3. Ако се једнаке одузму од једнаких, остаци су једнаки.
4. Ствари које се поклапају једна са другом, једнаке су међу собом.
5. Целина је већа од дела.

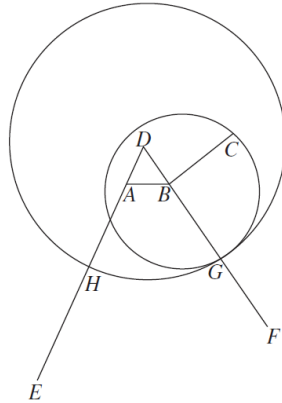
Као што се може видети, Еуклид се трудио да да минималан број постулата. На пример, постулат 3 говори само да се може конструисати круг са датим центром и датим отвором шестара. Нема речи о томе да се нека дужина може ‘пренети’ помоћу шестара са једне дужи на другу. Дакле, овде имамо колапсибилан шестар – када се подигне са папира, он се затвара. На самом почетку, Еуклид се потрудио да покаже како се ова рестрикција може превазићи. То је урађено у прва три става прве књиге у којој има укупно 48 ставова.

Први став говори о конструкцији једнакостраничног троугла са задатом страницом.



Дакле, задата је дуж  $AB$ . Нацртају се две кружнице – једна са центром у  $A$  и полупречником  $AB$  и друга са центром у  $B$  и истим полупречником. У пресеку ове две кружнице добија се теме  $C$  траженог једнакостраничног троугла. Нема никаквих коментара који објашњавају зашто се ове две кружнице уопште секу. Евидентно је да би нам требао неки постулат о непрекидности да бисмо то обезбедили. Но, тога нема.

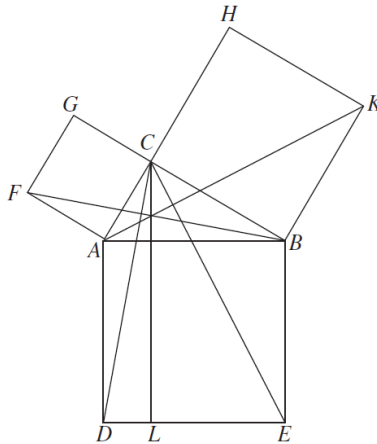
У следећем ставу се говори о томе како се од дате тачке  $A$  може нанети дуж једнаке дужине као и задата дуж  $BC$ .



Најпре се конструише једнакостранични троугао  $\triangle ABD$ , потом се налази пресек круга са центром у  $B$  и полупречником  $BC$  и продужењем дужи  $DB$ . Коначно се налази пресек круга са центром у  $D$  полупречника  $DC$  и продужетка дужи  $DA$ . Јасно је да је  $AH$  дуж исте дужине као и  $BC$ .

Најзад, показује се како се од задате дужи веће дужине може одузети задата дуж мање дужине.

У првој књизи се налазе теореме о подударности троуглова, о својствима паралелних правих, а и конструкције паралелограма. Последња два става – 47 и 48 посвећена су доказу Питагорине теореме и њеног обрата. Верује се да доказ Питагорине теореме који је овде приказан потиче од самог Еуклида.



Доказ је неоспорно елегантан. Наиме, примећује се да је квадрат

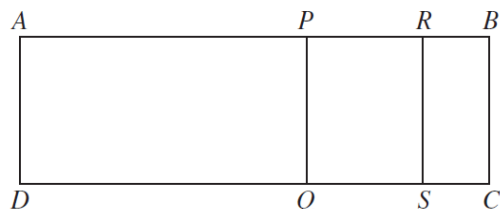
над  $AC$  једнак двоструком троуглу  $\triangle AFB$  (када се овако каже мисли се да су одговарајуће површине једнаке), јер је основица тог троугла  $FA = AC$ , а висина је  $AC$ . Овај троугао је пак једнак троуглу  $\triangle ACD$  (подударни су), а тај двоструки троугао је једнак правоугаонику  $AL$  (да, понекад се код Еуклида правоугаоник тако означава, а и зашто да не, јасно је о ком се објекту ради, зашто уводити додатне тачке?) – основица троугла је  $AD$ , а висина је друга страница правоугаоника  $DL$  (наравно, није то буквално висина,  $DL$  је једнако висини). Закључује се да је квадрат над  $AC$  једнак правоугаонику  $AL$ . На сличан начин се добија да је квадрат над  $BD$  једнак правоугаонику  $BL$ , те се тако и добија да је збир квадрата над  $AC$  и  $BC$  једнак квадрату над  $AB$ .

Вредна је спомена чињеница да Еуклид одмах после доказа Питагорине теореме даје и доказ обратног тврђења – уколико збир квадрата над две странице у троуглу јесте једнак квадрату над трећом те две прве странице образују прав угао.

Друга књига *Елемената* је краћа (садржи само 14 ставова) и већи део ње је помало необичан за наше поимање наставе геометрије. Ту се највише ради о грчкој *геометријској алгебри*. Наиме, криза у грчкој математици настала због проблема несамерљивости је, као што смо већ рекли, утицала на то Грци почињу да све бројеве и везе међу њима изражавају помоћу дужи, површина и слично. На пример, први став гласи:

Ако су дате две праве линије и једна од њих се подели на било који број одсека, онда је правоугаоник одређен са те две праве линије једнак правоугаоницима које су одређене са неисеченом правом линијом и сваким од одсека.

Наравно, овде су те праве линије заправо дужи и ово није ништа друго до закон дистрибутивности за множење:



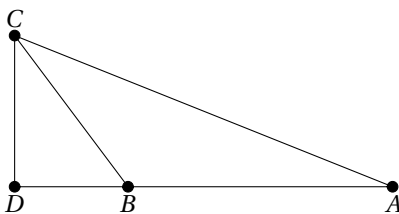
$AD \cdot AB = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$  (наравно, може и било који број делова, слика се односи на поделу на три дела). У каснијим књигама се налазе и докази закона асоцијативности и комутативности за множење.

Став 5, на компликован начин формулише формулу за разлику квадрата, прецизније ту је показано да је  $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$ . Све је ово



везано и за решавање квадратне једначине, сличан дијаграм, који се користи за доказ ове чињенице, користи се и за решавање једначине  $ax - x^2 = b^2$ . Нећемо се детаљније тиме бавити.

Последња три става су занимљива. Став 12 даје формулацију косинусне теореме за тупоугли троугао (наравно формулација укључује тај тупи угао), док став 13 даје формулацију те теореме за оштроугли троугао. Илустрација за став 12:



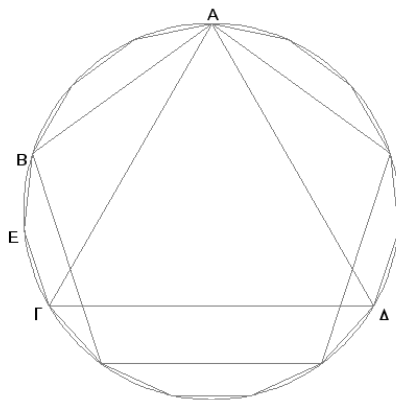
Речима се описује формула:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BD$ . Наравно, ово се лако показује двоструким коришћењем Питагорине теореме.

Став 14 гласи: Конструисати квадрат једнак правоугаоној слици.

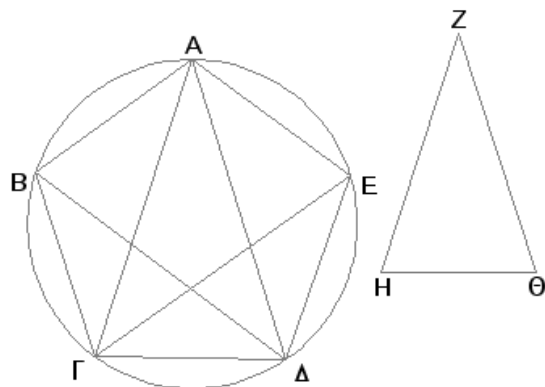
Дакле, овде експлицитна формулација није да се докаже нешто, него да се покаже како се може извести квадратура произвољног многоугла. У одговарајућој слици која илуструје став налази се опис квадратуре неког трапезоида, али је јасно да се то може урадити за било који многоугао. Најпре се заправо, на основу више ставова из прве књиге констатује да постоји правоугаоник чија је површина једнака површини датог многоугла, а суштина става је да правоугаоник сведе на квадрат. Интересантан је тај низ ставова у којима се постепено налази тај тражени правоугаоник, читаоцима препуштамо да их потраже ако им је то занимљиво, но ми то нећемо овде даље показивати.

Генерално се сматра да је материјал презентирао у прве две књиге углавном резултат рада Питагорејаца. Трећа и четврта књига баве се геометријом круга и сматра се да тај материјал углавном потиче од Хипократа са Хиоса. Први став у трећој књизи говори о конструкцији центра круга, док последњи, став 37 садржи тврђење добро нам познато:  $PA^2 = PB \cdot PC$ , где је  $P$  тачка ван круга,  $A$  додирна тачка тангенте на круг која пролази кроз  $P$ , док су  $B$  и  $C$  пресечне тачке сечице круга која пролази кроз  $P$ . У четвртој књизи има 16 ставова и они се углавном баве правилним многоугловима уписаним и описаним око круга.

На пример, 16. став говори описује конструкцију правилног петнаестоугла. Наиме, конструишу се једнакокраки троугао и правил-



ни петоугао који имају једно заједничко теме. И потом се констатује да је само потребно преполовити лук  $\widehat{B\Gamma}$ . Та добијена тачка нам тада даје и страницу траженог правилног петнаестоугла BE. Став 11, пак, описује конструкцију правилног петоугла уписаног у круг



и та је конструкција базирана на конструкцији једнакокраког троугла чији су углови на основици једнаки двоструком углу код врха. Потом се лук  $\widehat{A\Gamma}$  полови и тако се нађе страница правилног петоугла. А конструкција траженог једнакокраког троугла описана је у ставу 10.

Пета књига садржи дубље појмове. Ту се разматра теорија пропорција. Књига је у великој мери базирана на Еудоксовим резултатима.

О дефиницији 5, смо већ писали раније, док је дефиниција 4 оно што нам је сада познато као Архимедова аксиома (а и сам Архимед то приписује Еудоксу):

Каже се да су две величине у односу једна према другој ако неки умножак ма које од њих може бити већи од друге.

И ову дефиницију смо спомињали када смо говорили о Еудоксу. Поента је да се овде говори о упоредивости две величине. На пример, дуж и квадрат нису упоредиви.

Број ставова у књизи је 25 и у њој има више ставова који говоре о својствима пропорција, али и ставова који говоре о својствима бројева попут асоцијативности множења или дистрибутивности множења према сабирању.

У шестој књизи, у којој има 33 става, теорија пропорција се примењује на сличности разних фигура. Но, наведимо и једну важну дефиницију која се овде појављује.

Дефиниција 3. Каже се да је дуж подељена у крајњој и средњој размери (непрекидно) ако цела дуж стоји према већем делу као већи део према мањем.

Ово је чувени ‘златни пресек’. Нисмо споменули раније, али ако се страница правилног петоугла постави дуж његове дијагонале, онда имамо ову поделу дужи. У ставу 30 показује се како се дуж дели на овај начин. Термин непрекидно у нашој литератури је везан за чињеницу да се овај процес никада не завршава (као што смо видели раније).

Занимљив је став 31 (генерализација Питагорине теореме, сетите се и квадратуре ‘месеца’):

Код правоуглих троуглова фигура конструисана на страни наспрам правога угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних фигура над странама које образују прав угао.

Седма, осма и девета књига посвећене су теорији бројева, наравно у геометријском руху. Почиње се дефиницијама парних и непарних бројева, простих и сложених бројева, парно-непарних, непарно-непарних, квадратних и кубних бројева. Такође ту налазимо и дефиницију савршеног броја – то је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца. Прва два става су посвећена Еуклидовом алгоритму преко узастопних одузимања као што смо већ писали. У првом ставу се заправо говори о томе да ако се добије 1 на крају тог алгоритма, онда су бројеви узајамно прости, а други став тражи да се опише налажење заједничке мере (не заједничког делиоца, терминологија је прилагођена геометрији) за бројеве који нису узајамно прости. У овој књизи има и других познатих својстава бројева. На пример, став 24 каже да ако су  $a$  и  $c$  узајамно прости и ако су и  $b$  и  $c$  узајамно прости, онда су то и  $ab$  и  $c$ .

Осма књига није превише занимљива за модерног читаоца, док девета садржи неколико занимљивих резултата. На пример, став 20:

Простих бројева је више од сваке задате множине простих бројева.

Наравно да Еуклид не каже да простих бројева има бесконачно много. Појам бесконачности је још далеко у будућности. Он каже да простих бројева има више од ма које количине простих бројева. Доказ је онај који добро знамо: ако је дата нека количина простих бројева, све их помножимо и додамо јединицу. Анализирајући тај број добија се да мора да постоји још неки прост број сем тих задатих.

Став 35 речима на занимљив начин описује метод за налажење суме геометријске прогресије. Исписано формулом то је следеће:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + \dots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Одавде није тешко извести формулу:

$$a_1 + \dots + a_n = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Последњи, 36. став говори о формули за налажење савршених бројева. У модерним терминима то је следеће: ако је збир  $1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$  прост број, онда је број  $(1 + 2 + \dots + 2^{n-1})2^{n-1}$  савршен број. Наравно није тешко приметити да, ако је број  $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  прост, онда и број  $n$  мора бити прост. Наиме, уколико је  $n = ab$ , где су  $a, b > 1$ , онда је

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + \dots + 2^a + 1).$$

Грци су знали прва четири савршена броја: 6, 28, 496 и 8128. Ојлер је показао да је сваки паран савршен број управо горенаведеног облика. Оно што се и даље не зна је да ли има бесконачно много парних савршених бројева, као и да ли уопште постоји непаран савршени број.

Десета књига је најобимнија и најкомпликованија. Она садржи чак 115 ставова и посвећена је проблему (не)самерљивости. На самом почетку налазимо неколико ставова који говоре о алгоритму за испитивање самерљивости величина који смо раније спомињали. Ту се истиче да су величине несамерљиве уколико се поступак никада не завршава, а да се тако налази заједничка мера уколико се поступак завршава. Потом следи низ ставова о међусобним односима самерљивих и несамерљивих величина. Разматрају се дужи самерљиве у степену, мислећи притом на други степен, тј. две величине чији су квадрати несамерљиви. И сложеније формиране величине. Заправо ту се разматрају, у савременим ознакама, величине облика  $a \pm \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ ,  $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ . Ту су и поступци рационализације разломака облика  $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$ ,  $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$ . Јасно је да разматрање овако формираних величина

без модерне нотације није лако за праћење и стога се ова књига *Елемената* сматрала најнедоступнијом.

Последње три књиге су у највећој мери посвећене стереометрији. Једанаеста књига почиње низом дефиниција, од којих су неке проблематичне са логичког аспекта, попут „Тело је оно што има дужину, ширину и дубину”, „Граница тела је површина”. Последње дефиниције су дефиниције правилних полиедара: коцке, октаедра, икосаедра и додекаедра (пирамида је раније дефинисана, па овде нема дефиниције тетраедра). Ставови који следе се тичу односа правих и равни, на пример:

Став 3. Ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права.

Став 14. Равни управне на истој правој паралелне су.

Каснији ставови се односе на рогљеве, запремине паралелепипеда и слично.

Дванаеста књига је кратка и почиње нама добро познатим ставовима:

Став 1. Слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати на пречницима.

Став 2. Кругови се односе један према другом као квадрати на пречницима.

Потом следе ставови који се тичу запремина тела. На пример,

Став 7. Свака призма са троуглом у основи може се поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

Став 10. Свака купа је трећина ваљка, ако имају исту основу и једнаке висине.

Последња, тринаеста књига посвећена је правилним полиедрима. Она почиње следећим ставом.

Став 1. Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.

Нама није тешко да се у то уверимо. Наиме, ако је цела дуж  $a$ , а  $x$  је већи део, онда је  $a : x = x : (a - x)$ . Добија се квадратна једначина

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Одавде следи да је

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Наравно, одавде није тешко наћи колико је  $x$ . И следећих пет ставова даје резултате за златни пресек, а и став 9 је у вези са њим. Став 10 је занимљив.

Став 10. Ако је у круг уписан правилни петоугао, биће квадрат стране тог петоугла једнак збиру квадрата стране правилног шестоугла и стране правилног десетоугла уписаних у исти круг.

Пред сам крај *Елемената*, у ставовима 13–17 одређени су односи квадрата ивице и квадрата пречника описане сфере за правилне полиедре:

тело	однос
тетраедар	$\frac{2}{3}$
октаедар	$\frac{1}{2}$
хексаедар	$\frac{1}{3}$
икосаедар	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$
додекаедар	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

У последњем ставу *Елемената* најпре се пореде ивице правилних полиедара, а у другом делу тог става се показује да нема других правилних полиедара сем ових пет.

Значај Еуклидових *Елемената* је огроман. Састављени су око 300. године п. н. е. и копирани су велики број пута. У тим копирањима, додавани су коменари, неке додатне информације, додатни ставови, па чак и додатне две књиге за које се ипак зна да нису део оригиналних *Елемената*. Сматра се да је било око хиљаду издања овог дела.