Calculus 3. Ка модерној алгебри

Зоран Петровић

6. мај 2022. године

Лајбниц

Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) рођен је у Лајпцигу у протестантској породици међу чијим је даљим прецима сигурно било и Словена. Да ли је баш био лужички Србин или не, нећемо овде расправљати. ☺

Његов отац, Фридрих Лајбниц (1597–1652), био је професор филозофије морала на универзитету у Лајпцигу и имао је богату библиотеку где је млади Лајбниц рано могао да почне са својим образовањем. Студирао је филозофију и право на универзитетима у Лајпцигу, Јени и Алтдорфу. Што се математичких знања тиче, ту је имао само елементарно образовање. Но, рано је замислио пројекат конструкције математичког језика помоћу кога би се дедуктивно закључивање могло изводити. Те његове идеје су антиципирале каснији развој алгебре логике у XIX веку. Тај програм он никада није ни напустио, те и на његова каснија математичка истраживања треба гледати у том светлу. Пошто је 1666. докторирао на универзитету у Алтдорфу, ушао је у службу надбискупа у Мајнцу. Положај надбискупа у Мајнцу је био изузетно важан у Светом римском царству. Наиме, надбискуп у Мајнцу је био један од седам људи који су бирали цара.

Лајбниц је године 1672–1676. провео у дипломатској мисији у Француској. Наиме, немачке државе су биле прилично ослабљене после тридесетогодишњег рата (1618–1648) и заправо је Царство постојало само на папиру. Било је много држава и територија које су могле да одржавају своју војску. Стога је постојала опасност од уједињене Француске и агресивне политика краља Луја XIV („Краљ Сунце”). Лајбницова идеја, коју је изложио у *Consilium Aegyptiacum*, је била да се пажња Француске са Немачке и Холандије скрене на турски Египат, да је то оно што би требало да интересује једног хришћанског краља. Но, када је стигао у Париз, није му био дозвољен пријем код краља, а један од краљевих министара му је рекао да крсташки ратови нису више интересантни. Заправо је већ тада Луј XIV решио да изврши инвазију на Холандију, на нацију „продавачица риба и трговаца” по његовим речима.

Но, Лајбницов долазак у Париз му је омогућио да упозна многе значајне научнике, а посебно холандског научника Хајгенса, који је живео у Паризу од 1666. до 1681.

Хајгенс је баш у то време припремао своје значајно дело *Holorogium Oscillatorium*, које је било посвећено разним физичким и математичким аспектима кретања клатна. Он је видео да Лајбниц има талента, али да је слабо математички образован, те га је упутио у то шта да учи. Године 1673. нова дипломатска мисија одвела је Лајбница у Енглеску. Радило се о сугестији надбискупа Мајнца да енглески краљ посредује у сукобу Француске и Холандије. У сваком случају, Лајбниц је упознао Немца Олденбурга (кога смо већ споменули) и уз његову помоћ многе значајне научнике Енглеске. Заправо, он је у Краљевском друштву добио прилику да прикаже рад своје машине за рачунање, која је била унапређење у односу на Паскалову по томе што је могла да врши и множење и дељење. Мало због те машине, а више због веза које је Олденбург имао, Лајбниц је успео да постане члан Краљевског друштва. Од 1676. године Лајбниц је у служби Куће Хановер, самим тим, на самом крају и у служби енглеског краља Џорџа I.

У периоду 1672–1673. Лајбниц се бавио редовима. Посебно му је било занимљиво да разматра нумеричке низове разлика, тј. низове (b_n) за које је

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \ldots$$

за неки низ (a_n). Наравно, тада је лако могао да нађе суму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Ова једноставна идеја му је касније помогла и у развоју диференцијалног рачуна, по његовим сопственим речима. Први пример на коме је применио овај поступак је, добро нам познати ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}.$$

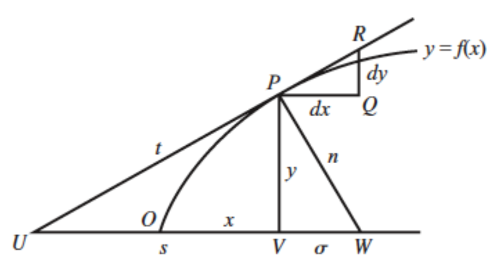
Наиме, $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, те се лако добија да је сума реда једнака 2. Дакле ове, како их сада зовемо „телескопске суме” су му биле посебно значајне. С тим у вези, формирао је ’хармонијски троугао’ (Паскалов троугао се зове и аритметички троугао):

$$
\begin{array}{c}
1 \\[4pt]
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\[4pt]
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \boxed{\tfrac{1}{4}} \\[4pt]
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \boxed{\tfrac{1}{20}} \quad \boxed{\tfrac{1}{5}} \\[4pt]
\frac{1}{6} \quad \boxed{\tfrac{1}{30}} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\[4pt]
\frac{1}{7} \quad \boxed{\tfrac{1}{42}} \quad \boxed{\tfrac{1}{105}} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Овај се троугао формира помоћу разлика. Наиме $n+1$-ва 'дијагонала' има чланове који су разлике одговарајућих чланова n-те 'дијагонале'. На пример: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{42} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105}$. Стога је сума бројева у n-тој дијагонали заправо телескопска сума помоћу бројева у претходној, те је та сума једнака броју на почетку претходне дијагонале. На пример,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \cdots = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \cdots = \frac{1}{4}, \quad \text{итд.}$$

Године 1673. Лајбниц се срео са идејом такозваног карактеристичног троугла читајући Паскалова *Lettres de 'A. Detonville* из 1659. године. У овим писмима је Паскал приказао разне резултате о квадратурама. Amos Detonville је заправо анаграм од Louis de Montalte, псеудоним који је Паскал користио у својим „Писмима из провинције”. Паскал је у том конкретном проблему разматрао инфинитезимални троугао придружен тачки на кругу, али је Лајбниц ту идеју генерализовао.



У произвољној тачки P на кривој $y = f(x)$ постављена је тангента и формиран је тај 'карактеристични (криволинијски) троугао' који чине бесконачно мали померај дуж x-осе, тј. dx, бесконачно мали померај дуж y-осе, тј. dy и бесконачно мали померај дуж саме криве ds. Са t је означен део тангенте од те тачке до пресека са x-осом, а са n део нормале од те тачке такође до пресека са x-осом. Са s, односно σ је означена пројекција тангенте t на x-осу (подтангента), односно нормале n на x-осу (поднормала).

Пошто се ради о инфинитезималном троуглу, може се сматрати да се крива у том бесконачно малом делу поклапа са тангентом те можемо сматрати да се троугао са страницама dx, dy, ds поклапа са троуглом PQR, који је сличан и троуглу UVP и троуглу PVW. Стога је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{y} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}.$$

Лајбниц је, да би имао конкретан проблем, претпоставио да је поднормала (σ) обрнуто пропорционална ординати, тј. претпоставио је да је $\sigma = a^2/y$. Тада из прве релације добија

$$\int y^2 dy = \int a^2 dx,$$

чиме добија да крива има једначину $y^3/3 = a^2 x$ те констатује да је крива са наведеном особином кубна парабола.

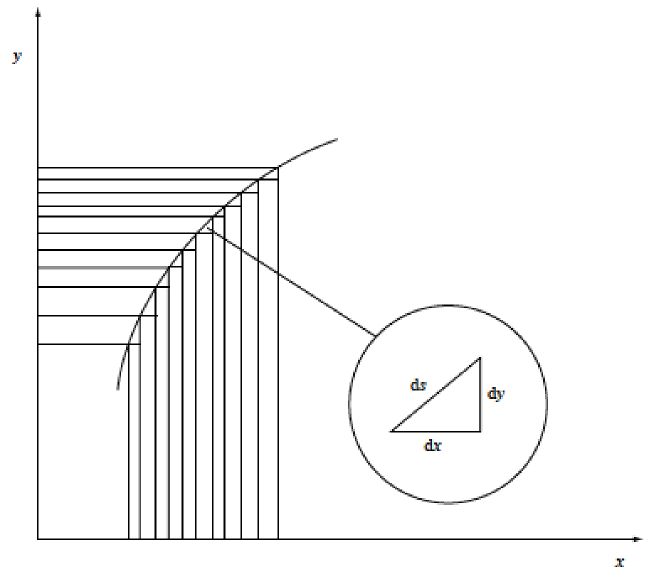
Из друге релације добија

$$\int y ds = \int n\, dx,$$

што даје формулу за површину тела које се добија обртањем криве око x-осе.

Током 1675. Лајбниц је направио суштинске кораке који су га довели до формулације метода који се, у нешто промењеној форми и сада користи. У ту сврху су му посебни били значајни карактеристични троугао и посматрање површине испод криве као суме бесконачних трака.

Лајбниц је замислио дељење x-осе испод задате криве на бесконачно много бесконачно малих интервала чији су крајеви $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Диференцијал је дефинисао као $dx = x_{n+1} - x_n$. На самој кривој имамо одговарајуће тачке $s_1, s_2, s_3, \ldots$, као и ординате $y_1, y_2, y_3, \ldots$ на y-оси, као и диференцијале $ds = s_{n+1} - s_n$, $dy = y_{n+1} - y_n$. Карактеристични троугао је издвојен на слици и има стране dx, dy, ds, а видели смо већ да можемо сматрати да је сличан троуглу који формирају σ, y, t (ознаке са претходне слике). Стога је $tg\gamma = \frac{dy}{dx}$, где је са γ означен угао који тангента у датој тачки заклапа са x-осом. Површина испод криве је унија трака ydx. Лајбниц је у почетку користио Кавалијеријев симбол omn. али је касније, вероватно на сугестију Јохана Бернулија (од



кога потиче и назив интегрални рачун), прешао на ознаку $\int$ као издужену варијанту слова s, а наравно од речи сума. Прво Лајбницово публиковано појављивање ознаке диференцијала је било 1684, а интеграла 1686. године.

Симболи d и $\int$ могу се примењивати више пута те се тако може посматрати и, на пример, ddx, које је бесконачно мало у односу на dx. За d поновљено n пута користио се симбол d^n, па је n-ти диференцијал од x био $d^n x$. Израз $\frac{dy}{dx}$ код Лајбница не треба сматрати изводом функције, него просто односом диференцијалних величина dy и dx. То олакшава алгебарске манипулације диференцијалима. На пример „ланчасто правило”, тј. извод сложене функције се може видети као проста манипулација разломцима:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ако се y посматра као зависна променљива од x у којој се узима да су x_n еквидистантне, тада је dx константно, па је $d^2x = ddx = 0$ и сви остали диференцијали од x вишег реда нестају. За рачунање $d(xy)$ користио је формулу

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy,$$

а потом је, без даљег образложења, изоставио $dxdy$ као бесконачно малу вишег реда. Наравно, итерацијом овог поступка, ако је $y = x$ може се добити и $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. За рационалне изложиоце, тј. за случај $y = x^{a/b}$, посматрао је изведену једнакост $y^b = x^a$, применио претходно правило, те добио $by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$, те је одатле извео да је $d(x^{a/b}) = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}dx$. Лајбниц је своја правила за диференцијални рачун објавио у раду у часопису *Acta Eroditorum*, чији је он био и један од уредника, 1684. године, са дугачким насловом у коме се de facto описује шта се све може урадити његовим коришћењем: *Nova methodus pro maximis i minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.* Лајбниц се веома трудио да рекламира своје идеје, комуницирао је са многим математичарима ван Британије и то је, уз једноставнији и бољи запис од Њутновог, свакако допринело великом ширењу његовог приступа ван Британије.

Деведесетих година XVII века, као и у првим декадама XVIII једна од главних области истраживања у Лајбницовом калкулусу састојала се у развоју правила за диференцирање и интеграцију трансцендентних функција – тригонометријских, логаритма и експоненцијалне функције. Јохан Бернули је ту био посебно активан. Дошао је до правила за, како га је називао, 'експоненцијални калкулус':

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv.$$

Лајбниц је $\int ydx$ видео као 'суму' бесконачног низа трака (правоугаоника) ydx. Из рада са редовима знао је да се сума реда може добити помоћу низова разлика. Да би редуковао $\int ydx$ на суму разлика, треба да нађе z тако да је $dz = ydx$ (сетите се низова (b_n) и (a_n): треба сумирати b_n а зна се да је $b_n = a_n - a_{n+1}$). Тако да закључује да је

$$\int ydx = \int dz = z.$$

Када је открио тако инверзну природу диференцирања и интеграције, одмах је могао да нађе и правило за парцијалну интеграцију. Наиме, из $d(xy) = xdy + ydx$ следи

$$xy = \int d(xy) = \int xdy + \int ydx.$$

Ојлер

Леонард Ојлер (1707–1783) је био ученик Јохана Бернулија и сигурно је најпознатији швајцарски математичар, а можда и најплоднији математичар у историји математике. Како је он највећи део свог радног века провео у Русији, можемо га сматрати и руским математичаром. Математику је учио од Јохана Бернулија и дружио се са његовим синовима Николом и Данијелом. Уз подршку Бернулијевих, добио је позицију у Петрограду 1727. године. Ојлер је био свестрано образован и заправо је добио место на медицини и физилогији, касније на природној филозофији. Но, Никола Бернули је умро 1726, а Данијел се 1733. из Петрограда преселио у Базел и Ојлер тако остаје, у својој 26-ој години најзначајнији математичар у Петрограду.

Започнимо најпре Ојлеровим доприносом математичкој нотацији. Он је увео и промовисао коришћење слова e за базу природног логаритма. Симбол π јесте коришћен и раније, али га је Ојлер значајно промовисао. Пред крај живота је увео и симбол i за корен из -1. Занимљиво је да га је раније користио за ознаку бесконачности, па је тако писао и $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, где је i бесконачни број. У елементарној геометрији је такође имао значајан допринос у нотацији. Странице троугла је означавао са a, b, c, а одговарајуће углове са A, B, C, док је са R, r, s означавао полупречнике описаног и уписаног круга и полуобим троугла. Од других ознака треба навести да је Σ користио за суму, а да је са $f(x)$ је означавао функцију.

У свом делу „Introductio in Analysin Infinitorum" из 1748, које даје основе математичке анализе, увео је функцију од променљиве величине као 'било који аналитички израз сачињен од те променљиве величине и бројева или константних величина'. Јасно је да таква дефиниција није прецизна, но послужила је Ојлеровој сврси – форсирао је аналитички приступ, па и у раду са тригонометријским функцијама; синус је задат преко реда $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \cdots$. На пример, још је у писму Јохану Бернулију из 1740. навео формулу $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$.

Покажимо сада како је Ојлер нашао суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Пођимо од следеће чињенице: ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле полинома $p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, онда је

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Није се тешко уверити да је ово тачно. Наиме, ако је

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

дељењем са x^n добијамо

$$\frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + a_n = 0.$$

Ако је $y = \frac{1}{x}$, онда из

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

и Вијетових формула добијамо

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_1,$$

тј.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Ојлер сада ово екстраполира на функцију синус. Наиме, на основу развоја у ред:

$$\sin z = 0 \text{ и } z > 0 \text{ акко } 0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots.$$

Сменом $w = z^2$ добија се

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \cdots$$

По аналогији са коначним случајем, ако су нуле овог реда $w_1, w_2, \ldots$ (што су заправо квадрати нула синуса), онда је

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \cdots = -(-\frac{1}{3!}) = \frac{1}{6}.$$

Но, знамо да су позитивне нуле синуса $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, па су ове нуле заправо $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$. Стога добијамо

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6},$$

односно

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ојлер је нашао суме $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2l}}$ за све $l \in \{1, 2, \ldots, 13\}$. На пример, добио је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{26}} = \frac{2^{24} \cdot 76977927 \cdot \pi^{26}}{27!}.$$

Наведимо и Ојлеров доказ бесконачности скупа простих бројева коришћењем дивергенције хармонијског реда.

Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и нека су то $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Нека је n неки природан број. Тада је

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

за неке $\alpha_i \geqslant 0$. Узмимо $\alpha = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Посматрамо производ

$$P = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right).$$

Јасно је да се у развоју овог производа у збир појаве сви бројеви од 1 до $\frac{1}{n}$, те је $P > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Но,

$$\begin{aligned} P &< \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k}{p_k - 1}. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k}{p_k - 1},$$

но, како израз на десној страни не зависи од n добијамо да је сума $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ограничена, а знамо да то није тачно. Стога мора постојати бесконачно много простих бројева. Ојлер је много експериментисао са бесконачним редовима, али о томе нећемо сада писати.

У писму Голдбаху из 1746. Ојлер је навео следећи занимљив резултат: $i^i = e^{-\pi/2}$. Наиме, из Ојлерове формуле $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ за $\theta = \pi/2$ добија се да је $e^{i\pi/2} = i$. Стога је

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}.$$

Заправо, Ојлер је 1749. показао да се сваки комплексан степен комплексног броја, тј. $(a + bi)^{c+di}$ може изразити у облику $p + qi$. Овај аспект Ојлеровог рада је занемарен и прича о реалним вредностима i^i се озбиљније разматрала тек у XIX веку.

Немогуће је и приближно навести све Ојлерове идеје и резултате из теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, рачуна коначних разлика, елиптичких интеграла, специјалних функција и других области. У вези нотације наведимо још његову ознаку

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdots q},$$

која је, евидентно претеча модерне ознаке $\binom{p}{q}$.

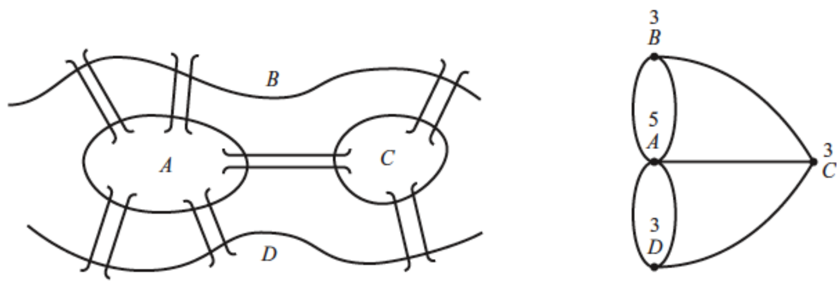
За крај наведимо и Ојлеров доказ мале Фермаове теореме, која каже да је, ако је p прост број, који не дели цео број a, онда p дели $a^{p-1} - 1$.

Он је заправо доказао да $p \mid (a^p - a)$ за све a индукцијом по a. Наравно да је тврђење тачно за $a = 1$. И, ако претпоставимо да је тачно за a, лако се покаже за $(a+1)^p-(a+1)$ (наравно користимо модерне ознаке у доказу ради краћег записа):

$$(a+1)^p-(a+1)=a^p+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+1-a-1=a^p-a+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k.$$

Како $p\mid\binom{p}{k}$ за све $1\leqslant k\leqslant p-1$, резултат следи из индуктивне хипотезе.

Године 1736. Ојлер је објавио рад за који се сматра да је први рад из области теорије графова. У том раду је он дао решење Проблема о кенигзбершким мостовима. Наиме, у граду Кенигзбергу који је био значајан универзитетски град у Источној Пруској, а у коме је дуги низ година живео и Имануел Кант, на реци Прегал било је седам мостова који су спајали два острва са копном, а и између себе.



Слика 1: Кенигзбершки мостови и придружен граф

Проблем се састојао у томе да се установи да ли се може прећи преко сваког моста али тачно једном. Ојлер је проблем поједноставио тако што је и острва и обе обале заменио тачкицама, а мостове луковима који их повезују. Тако је добио граф са слике. Ако желите да прођете ивицом сваког графа тачно једном. онда у свако теме улазите и излазите паран број пута сем у случају почетног и завршног темена. Но, видимо да у сваком темену има по три лука (степен сваког темена је 3). Стога је немогуће проћи свим мостовима тачној једном, било да је захтев да се вратите у почетну тачку или не. Пут у графу који пролази сваком ивицом тачно једном, данас се назива Ојлеров пут. А Кенигсберг се данас зове Калињинград и налази се у Русији.

Ка модерној алгебри

Као што смо видели, проблем налажења решења алгебарских једначина трећег и четвртог степена, која се изражавају као рационалне функције корена израза добијених од коефицијената једначине, решен је у ренесансној Италији. Но, питање за једначине вишег степена остало је неразрешено. У овом делу ћемо се позабавити тим питањем, тј. како је разматрање овог проблема довело до резултата Евариста Галуа са којим се може рећи да почиње развој модерне алгебре — области која проучава алгебарске структуре попут група, прстена, поља.

Варинг

Едвард Варинг (1736–1798) био је енглески математичар који је у два своја значајна дела *Miscellanea analytica* (Кембриџ 1762) и *Meditationes algebricae* (Оксфорд 1770) (при чему је заправо друго дело, упркос новом називу, било друго, проширено издање првог) дао прве резултате на том путу. Наиме, ако се посматра општа једначина степена n:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots + \cdots = 0,$$

и њени корени $x_1, \ldots, x_n$, онда нам је познато да су коефицијенти a_i заправо елементарне симетричне функције ових корена:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + \cdots + x_n, \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \\ \text{итд.} & \end{aligned}$$

Варинг је у свом првом делу показао да се свака рационална симетрична функција корена ове једначине може изразити као рационална функција коефицијената тако што је то најпре показао за суму степена

$$s_m = x_1^m + \cdots + x_n^m,$$

а потом за све остале симетричне функције. У другом делу је разматрао решења циклотомичне једначине (једначине „деобе круга” пошто се налажење правилног n-тоугла уписаног у дати круг своди на решавање ове једначине):

$$x^n - 1 = 0.$$

Разматрао је и проблем да се нађу једначине које се могу решити сумама облика

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_n}.$$

Вандермонд

Александар-Теофил Вандермонд (1735–1796) био је француски математичар, који је 1770. године представио париској Академији наука рад под насловом „О решавању једначина". Он почиње од добро познатих решења квадратне и кубне једначине са жељом да нађе општи принцип за решавање алгебарских једначина. Најпре решења квадратне једначине x_1, x_2 напише у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\right].$$

Овај се израз може написати и у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}\right]$$

и видимо да се овде појављују симетричне функције корена.

Вандермонд се потом пита да ли се општа једначина степена n може решити помоћу аналогног израза

$$\frac{1}{n}\left[(x_1 + \cdots + x_n) + \sqrt[n]{(\rho_1 x_1 + \cdots \rho_n x_n)^n} + \sqrt[n]{(\rho_1^2 x_1 + \cdots \rho_n^2 x_n)^n} + \cdots + \sqrt[n]{(\rho_1^{n-1} x_1 + \cdots \rho_n^{n-1} x_n)^n}\right],$$

где су $\rho_1, \ldots, \rho_n$ n-ти корени из јединице. Данас изразе облика

$$\rho_1 x_1 + \cdots + \rho_n x_n$$

називамо Лагранжовим решавачима, пошто их је Лагранж увео у раду приложеном берлинској Академији 1771. Наиме, Вандермондов рад јесте предат раније, али је објављен тек 1774.

Вандермондов метод у случају кубне једначине фино 'ради'. Наиме, ако је $\zeta^3 = 1$, а $\zeta \neq 1$, те су и ζ и ζ^2 примитивни корени из јединице, а x_1, x_2, x_3 решења кубне једначине, онда имамо једнакост

$$\left(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3\right)^3 = S + 3\zeta X + 3\zeta^2 Y, \tag{1}$$

где је

$$\begin{aligned} S &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3 \\ X &= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 \\ Y &= x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2. \end{aligned}$$

Видимо да S јесте симетрична функција корена, док X и Y нису, но $X + Y$ и XY јесу симетричне функције, па тиме изразиве преко коефицијената, а и корени су квадратне једначине. Стога се може добити колики је израз на десној страни једначине (1) те се могу добити и корени једначине. За једначину степена 4, Вандермонд је нешто модификовао свој метод, док за једначине вишег степена тај метод јесте успешан само у специјалним случајевима. На пример, он је решио једначину

$$x^{11} - 1 = 0.$$

Најпре ју је редуковао на једначину степена 5 чији су корени

$$\rho + \rho^{-1}, \quad \rho^2 + \rho^{-2}, \quad \rho^3 + \rho^{-3}, \quad \rho^4 + \rho^{-4},$$

где је ρ примитивни једанаести корен из јединице. Затим је, за решавање те једначине петог степена користио раније наведене решаваче у облику

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5,$$

где је α примитивни пети корен из јединице. Но, овде се мора пажљиво изабрати редослед корена x_i да би се L^5 могао фино одредити и за овај случај се то може разрешити пробањем, али за општи случај је потребан доказ да се то може увек урадити. То је извео тек Гаус. Вандермонд је тврдио да се решења опште једначине $x^n - 1 = 0$, његовим методом увек могу лако наћи, те се чини да није био свестан проблема избора редоследа корена.

Лагранж

Жозеф Луј Лагранж (1736-1813) рођен је у Торину и крштен је као Ђузепе Лодовико Лагранђа. Данас је познат као француски математичар, мада га Италијали 'воде' као италијанског математичара. У сваком случају, његова породица је имала веза са Француском. Он сам је дуго времена радио у Берлину и у Паризу, мада је започео каријеру у Италији.

Веома занимљив (и обиман) рад од преко 200 страница, Лагранж је приложио берлинској Академији. Наслов тог рада је био „Размишљање о алгебарском решавању једначина”.

Он најпре разматра кубну једначину у облику

$$x^3 + nx + p = 0.$$

Наравно, решење нам је познато из Кардановe књиге где се оно тражи у облику $x = u + v$, где су u^3 и v^3 корени квадратне једначине. Лагранж показује да се u и v могу изразити као функције корена a, b, c почетне кубне једначине:

$$u = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c), \quad v = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c),$$

где је наравно α примитивни трећи корен из јединице.

Лагранж каже да се овакав резултат може добити и директним методом. Наиме, он полази од произвољен линеарне функције по a, b, c:

$$y = Aa + Bb + Cc.$$

Пермутовањем корена a, b, c добија се 6 израза који су стога корени једначине шестог степена. Ако желимо да то буде једначина у којој ће се појављивати само степени од y^3 (можда можемо да је зовемо бикубна једначина), онда се може показати да су A, B, C пропорционални са $1, \alpha, \alpha^2$, или са $1, \alpha^2, \alpha$. Тако да се добијају ипак раније наведени изрази. Дакле, занимљиво је да он разматра понашање израза при пермутацији корена.

Потом разматра једначину четвртог степена у облику

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Ферари је показао да се решења добијају помоћу решења кубне једначине („разрешавајућа кубика"):

$$y^3 - \frac{1}{2}ny^2 - qy + \frac{1}{8}(4nq - p^2) = 0.$$

Лагранж показује да се корени u, v, w ове једначине добијају као симетриче функције корена a, b, c, d почетне једначине четвртог степена:

$$u = \frac{1}{2}(ab + cd), \quad v = \frac{1}{2}(ac + bd), \quad w = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

У одељку под бројем 100, Лагранж разматра рационалне функције $f(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ корена опште једначине степена n. Ти корени се разматрају као неодређене. За две функције t и y ових корена каже да су слични ако све пермутације ових корена које остављају t инваријантним, остављају и y инваријантним и обратно. Лагранж доказује следећу теорему.

Ако све пермутације које остављају t инваријантним остављају и y инваријантним, онда се y може изразити као рационална функција од t и коефицијената дате једначине.

Он ову теорему примењује на једначине степена 2, 3 и 4, а каже да примена на једначине вишег степена још увек превише компликована. Такође је разматрао и неке специјалне случајеве већ навођене циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$.