

Вијет; логаритми; Декарт

Зоран Петровић

19. април 2021. године

Вијет и аналитичка вештина

Франсуа Вијет (1540–1603) био је правник по образовању, посланик у парламенту Бретање, а касније је радио као саветник краља Анрија IV. У рату против Шпаније прославио се „разбијањем” шифрованих порука противника. Математиком се бавио уз друге послове, али је и пред тога имао низ важних резултата.

Значајан је најпре због пропагирања децималног система у односу на сексагезимални. Писао је да шездесетице и слично треба користити што ређе или уопште не у математици. Преференцу треба давати десетинама, стотинама, хиљадама, као и десетим, стотим и хиљадитим деловима. Што се тиче записивања бројева, није увек био конзистентан. На пример, дужину полукружнице круга пречника 200000 писао је као $314,159\frac{265,35}{1,000,000}$, као **314,159,265,35**, а понекад и као **314,159|265,35**.

Проблем са постојећом алгебарском нотацијом није био само у томе што је била компликована, што се разликовала у записима операција, квадрата, корена, једнакости, него и у томе што није постојао начин да се запишу опште квадратне, кубне и остале алгебарске једначине. Постојали су записи за непознату, али су коефицијенти увек били конкретни бројеви. Вијет предлаже да се самогласници користе за непознате величине, а сугласници за познате (односно задате) величине. На пример, општи облик квадратне једначине би тада могао да се записује овако: $BA^2 + CA + D = 0$, но Вијет, нажалост, није квадрат писао овако, па чак ни као AA , него A *quadratus*, а A^3 као A *cubus*. Он јесте користио немачке симболе $+$ и $-$ за сабирање и одузимање, али *in* за множење, а *ae* (од латинског *aequalis*) за једнакост (мада је Роберт Рекорд још 1551. у свом делу „Тоцило мудрости” увео (нешто продужен) знак једнакости $=$ уз образложење да „ништа не може бити више једнако од две паралелне праве”).

Вијету се није свиђао термин АЛГЕБРА, више је волео да користи термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА. Наиме, сматрао је да у тражењу непознатих величина, треба спровести анализу у духу грчких геометара попут Папуса (о коме ми нисмо причали, али знамо о чему је реч). На

пример, ако бисмо користили савремене ознаке, при тражењу непознате x у једначини $x^2 - 5x + 6 = 0$, ми бисмо претпоставили да она постоји (анализа проблема), добили бисмо да тада мора бити $(x - 2)(x - 3) = 0$, те је $x - 2 = 0$, или $x - 3 = 0$, односно $x = 2$ или $x = 3$. Ово није довољно, јер сада треба спровести и синтезу – проверити да ли ово заиста јесу решења. Термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА је широко прихваћен међу математичарима. Савремени појам МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ долази са Њутном када он показује да се и на бесконачне редове може применити АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА.

Вијет се доста бавио и тригонометријом, саставио је детаљне таблице за тригонометријске функције, за углове са прираштајем од једног минута. Користио је децимални запис за резултат, али је резултате изражавао у целим бројевима, тако што је радио са правоуглим троуглом чија је хипотенуза била дужине од 100000 (синус и косинус би биле дужине одговарајућих катета). Тригонометријске функције су се у то време користиле и као претече логаритама у смислу да су се адиционе формуле користиле за претварање производа у збир (а и за претварање количника у разлику). На пример, уколико би било потребно наћи производ бројева 94476 и 65341, онда би се могла користити формула

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

тако што би се потражили у таблицама угао α такав да је $\cos \alpha = 47328$ ($2 \cos \alpha = 94476$) и угао β за који је $\cos \beta = 65341$ (рекосмо да су код Вијета у таблицама то били цели бројеви) и потом би се у таблицама видело колико је $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, те би се добијене вредности једноставно сабрале.

Од раније су биле познате тригонометријске функције двоструког и троструког угла, док је Вијет, користећи домишљате манипулације успео *de facto* да дође до формула којима се $\cos nx$ и $\sin nx$ изражавају у облику полинома по $\cos x$, $\sin x$:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots$$

То му је свакако помогло да реши проблем који је 1593. године као изазов француским математичарима поставио белгијски математичар ван Румен – решити једначину 45. степена:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \dots - 3795x^3 + 45x = K.$$

Вијет је приметио да та једначина одговара заправо развоју $K = \sin 45\theta$ у терминима $x = 2 \sin \theta$ и одмах је нашао све позитивне корене.

Оно што је занимљивије од овог трика је како је Вијет искористио тригонометрију да реши несводљиви случај кубне једначине. Приметио је да он одговара проблему трисекције угла. Погледајмо на примеру његов општи метод.

Код Кардана је, као што знамо, разматрана једначина

$$x^3 = 15x + 4.$$

Идеја Вијета се састоји да се искористи формула

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta.$$

У ту сврху, искористимо смену $x = \frac{y}{m}$ где ћемо m погодно изабрати. Почетна једначина се своди на

$$y^3 = 15m^2 y + 4m^3.$$

Уколико желимо да је $y = \cos \theta$ решење једначине (за непознати угао θ), онда m бирамо тако да је

$$15m^2 = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad 4m^3 = \frac{1}{4} \cos 3\theta.$$

Дакле, $m^2 = \frac{1}{20}$ и $m = \frac{1}{4} \cos 3\theta$. За m можемо да узмемо да је $m = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, не тражимо све m који то задовољавају. Стога је $\cos 3\theta = \frac{2}{5\sqrt{5}}$. Дакле, имамо:

$$3\theta = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 2\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 4\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right).$$

Дакле, за θ имамо три могућности:

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right), \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 2\pi \right), \quad \theta_3 = \frac{1}{3} \left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 4\pi \right).$$

Но, $y = \cos \theta$, а $x = (2\sqrt{5})y$, те тако добијамо сва три реална решења. Наравно, друго је питање како препознати да је једно од ових решења једнако 4, али свакако јасно видимо три реална решења.

За крај напоменимо да Вијет ипак није извео Вијетове формуле. Наиме, у томе га је спречило његово избегавање негативних коефицијената и негативна решења. Добио је неке парцијалне резултате. На пример, разматрао је једначину

$$x^3 + b = 3ax$$

и добио везе

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = b, \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 3a,$$

где су x_1 и x_2 нека два решења ове једначине (остављамо за вежбу читаоцима да ово изведу, приметимо да се треће решење добија из преостала два). Тек је Албер Жирар 1629. године нашао опште формуле које су нам данас познате као Вијетове. Жирар није избегавао ни негативна ни комплексна решења.

Откриће логаритама

Као што смо видели, адиционе формуле за тригонометријске функције су се користиле и за олакшавање рачунања, свођењем рачунања производа на збир. Шкотски властелин Џон Непер (1550–1617) је био изумитељ, промовисао је протестантизам, а математиком се бавио аматерски у практичне сврхе.

Немачки алгебриста Штифел је направио таблицу у којој је исписао степене двојке:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Може се приметити да операцији сабирања у горњем (аритметичком) низу одговара операција множења у доњем (геометријском) низу. Мана је наравно у томе што је „покупљено” сувише мало бројева степенима двојке, степени су „ретко” распоређени. Да би то поправио, Непер уместо 2 узима број близак јединици, заправо број $1 - 10^{-7} = 0,9999999$. Посматра степене $(1 - 10^{-7})^L$ тог броја, а да би избегао превише децимала, множи их са 10^7 , те заправо посматра бројеве

$$N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L.$$

Дакле, ако је дат број N , број L је тај ЛОГАРИТАМ броја N . Термин ЛОГАРИТАМ Непер је увео у свом делу „Опис чудесних правила логаритама” објављеном 1614. године. Логаритам је добијен као комбинација речи *logos* (разум, однос, реч) и *arithmos* (број).

Дакле, ако су нам дати бројеви

$$N_1 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_1} \quad \text{и} \quad N_2 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_2},$$

онда је

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_1 + L_2}.$$

Према томе, ако је $L = \text{„log”}(N)$, онда је

$$\text{„log”} \left(\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} \right) = \text{„log”}(N_1) + \text{„log”}(N_2).$$

Дакле, не трансформише се баш производ у збир, али до на померање децималног зареза то ипак имамо.

Како се могу правити логаритамске таблице за овакве логаритме? Ако је $N_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n$, онда имамо да је

$$\begin{aligned} N_n &= 10^7(1 - 10^{-7})^n \\ &= N_{n-1}(1 - 10^{-7}) \\ &= N_{n-1} - 10^{-7}N_{n-1} \end{aligned}$$

Дакле, имамо рекурентну везу $N_n = N_{n-1} - 10^{-7}N_{n-1}$.

$$\begin{aligned} N_0 &= 10^7 = 10000000 \\ N_1 &= N_0 - 10^{-7}10000000 = 9999999 \\ N_2 &= N_1 - 10^{-7}N_1 = 9999999 - 0,9999999 = 9999998,0000001 \\ N_3 &= N_2 - 10^{-7}N_2 = 9999998,0000001 - 0,99999980000001 \\ &= 9999997,00000029999999. \end{aligned}$$

Заправо би он ипак заокруживао резултат, те је $N_3 = 9999997,0000003$. Непер је написао да је на овом свом делу радио 20 година.

Оксфордски професор Хенри Бригз (1561–1630) је 1615. године посетио Непера на његовом имању да продискутују и евентуално уведу нека побољшања. Сложили су се да је било добро да буде $\log 1 = 0$ и $\log 10 = 1$ (дакле, да то буде логаритам са основом 10). Неперов логаритам је заправо близак логаритму са основом e^{-1} , пошто је

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \sim e^{-1}$$

(како ми сада знамо). Непер је тада већ био старији, те је Бригз преузео тај задатак. Већ 1615. године, Бригз објављује „Логаритамске таблице” где су логаритми бројева од 1 до 20000 и од 90000 до 100000 израчунати на 14 децимала. Холандски издавач Влак је допунио ове таблице 1618. године. Израчунао је логаритме за бројеве од 20000 до 90000 на 10 децимала, а наслов дела је био „Друго издање Бригзових таблица”. Ове су таблице биле од великог значаја посебно за астрономе, јер су знатно скраћивале рачун.

Рене Декарт (1596–1650)

Рене Декарт је рођен у градићу Ла Еј, који се налази око 300 километара југоисточно од Париза у провинцији Турен (данас се то место зове по њему). Отац му је био припадник нижег племства и обављао је дужност провинцијског судије. Са осам година Декарт је започео

школовање у језуитском школи у Ла Флешу, где је првих пет година имао стандардне курсеве језика, класике, реторику, док су завршне три биле посвећене учењу логике, филозофије, физике и математике. Математика га је највише заинтересовала, пре свега због сигурности својих доказа. Он је од малена био осетљивог здравља и није се очекивало да ће дуго живети. Стога су му његови наставници у Ла Флешу дозвољавали да има неке привилегије које други ученици нису – могао је дуже да спава, није се очекивало да похађа сва предавања. Тај обичај дугог спавања задржао је целог живота.

По напуштању школе 1612. отишао је у Париз да ужива у друштвеном животу престонице. Но, бзо се тога заситио, посветио се изучавању математике. Мада није имао амбиција да има каријеру попут свог оца, ипак је уписао права на универзитету у Пуатијеу 1616. Но, 1618. се, засићен учења, пријавио у војску као племић добровољац, најпре са холандским, а потом и са баварским групама. Заправо и нема података о његовом стварном учешћу у ратовима, имао је и тада доста времена да се бави изучавањем онога што је желео. Године 1621. напушта војску и доста путује. Потом се настањује у Паризу, где 1628. довршава своје дело „Правила за изучавање духа”, на латинском. Исте године одлази у Холандију и ту остаје да ствара наредних 20 година. Ту објављује и своја најзначајнија дела, од којих ће нама посебно бити важно чувено дело „Расправа о методу”, односно трећи додатак тог дела – „Геометрија”. Дело је објављено 1637. на француском и то је било помало неуобичајено, пошто је латински тада био универзални језик науке и филозофије. Заправо је у првом издању сама *Расправа* била на 78 страница, што је чинило једну шестину целе публикације. Ово је дело било врло популарно, донело је славу свом аутору, али не и зараду, пошто је Декарт, у накнаду за ауторска права тражио само 200 примерака да подели својим пријатељима. Но, штампарија је лепо зарадила.

Декартова филозофија систематске сумње, као што је овде изложена, доминира у његовој потрази за сигурним знањима. Сигурност у математичким извођењима га је, као што смо већ напоменули, одушевљавала и математика је, по њему, требала да буде модел за свако изучавање.

Дуги низ једноставног и лаког закључивања којима геометри долазе до њихових најтежих доказа ме је довела до тога да замислим да су све ствари, знање којих је доступно људском уму, међусобно повезане на исти начин и да нема ничег што је толико удаљено од нас да буде ван нашег домаћаја, или тако сакривено да га не можемо открити, под условом да се уздржимо од прихватања погрешног за тачно и увек чувамо у нашим мислима ред неопходан за извођење једне истине из друге.

Декарта нису толико занимали математички резултати, но сам начин размишљања у математици. Почетна тачка је за њега била да открије најпростије идеје или принципе, оне у које се не може сумњати. Пошто

је изгубио поверење у традиционална учења, Декарт жели да раскине са било каквим претходним ауторитетима у области науке и филозофије, да раскрсти са свим догмама и доктринама.

Сматрао сам да морам да одбацим као апсолутно погрешна сва мишљења у односу на која бих могао да имам и најмању сумњу да бих утврдио да ли после тога остаје ишта у мом веровању што је у потпуности неспорно.

Декарт је стога дошао до тврђења које је било толико чврсто да се не би могло довести у сумњу, до сигурности у сопствену егзистенцију. Наиме, сумња је сама по себи акт мисли, а мисли нема без мислиоца. Стога је он изрекао ту добро нам познату мисао: „Мислим, дакле јесам”. Потом је наставио да тражи друга тврђења која су такође очигледна и несумњива.

Никада не смемо дозволити да будемо убеђени у истинитост нечега сем на основу нашег разума.

Ово његово велико поверење у људски ум је покренуло велику расправу у Западном свету о односу вере и разума.

Расправа почиње кратким уводом.

Ако би се ова расправа учинила сувише дугом да се одмах прочита, може се поделити на шест делова. Тако ће се у првом делу наћи различна разматрања о наукама; у другом темељна правила методе коју је аутор истраживао; у трећем неколико правила о моралу до којих је аутор дошао помоћу ове методе; у четвртном разложи на темељу којих доказује постојање Бога и људске душе, а који чине основу његове метафизике; у петом низ питања из физике која је он истраживао и, посебно, објасњење о раду срца и неколико других проблема из области медицине, у шта спада и тумачење о разлици између наше и животињске душе, док ће у последњем наћи оно стхо аутор сматра потребним да би се у проучавању природе отишло корак даље, као, и на крају, разлоге који су га подстакли да пише. Као што смо већ навели, постоје три додатка.

Наведимо пар речи о прва два.

У „Оптици” се разматрају својства светлости, закон преламања светлости, анатомија људског ока, као и практична питања о облику сочива.

Други додаток „Метеорологија” је посвећен Декартовом објашњењу атмосферских појава, формирања снежних пахуља, величине и облика кишне капи, узроке грмљавине и муње, формирања дуге.

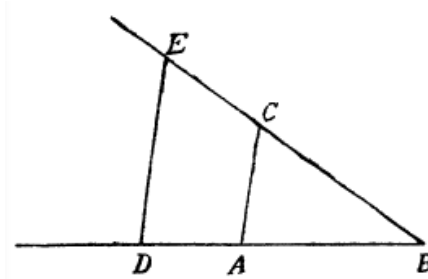
„Геометрија” има три дела.

Први део носи наслов „Проблеми који се могу конструисати (решити) помоћу кругова и правих”.

Прва реченица гласи:

Сваки проблем у геометрији може се лако свести на такав облик да је познана дужина неких дужи довољно за његову конструкцију (решење).

Декарт потом показује везу између аритметичких операција и геометријских конструкција. На пример, множење илуструје следећим цртежом.

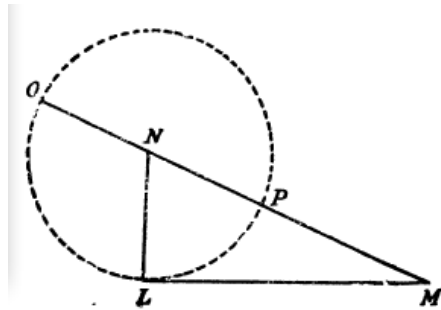


Каже да се AB узима за јединицу (иначе наводи да се јединица може једном изабрати и то произвољно, после се све изводи на основу тог избора) и ако треба помножити BD са BC то ће се извести тако што само треба спојити A и C и нацртати DE паралелно са BC . Тада је BE производ BD и BC .

Као што видимо, он производ две дужи идентификује са дужи, не треба му правоугаоник за то. Стога он нема проблема са збиром $ab + c$, где су a , b и c дужи. Ипак, задржава у мислима и правило хомогености, па каже да сви изрази које сабирамо морају имати исту 'димензију', те ако имамо разлику $aabb - b$ онда морамо поделити $aabb$ јединичном дужином, а помножити b два пута јединичном дужином. Но, ипак је велики напредак да се дозвољава рачунање са различитим изразима, без обзира на ове додатне напомене, које и немају утицаја на сам рачун (можда је то стављено и због неке замишљене практичне примене где не можете сабирати квадратне и дужне метре, али није нам то важно).

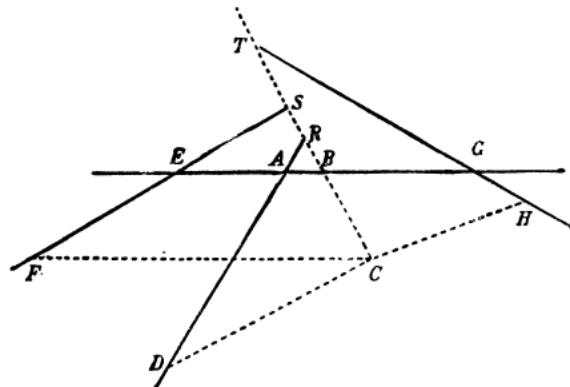
Приметили смо већ да није писао a^2 , него aa , али јесте писао a^3 . Још један пример његове симболике. Једнакост $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2} = c$ би записао овако: $\sqrt[3]{C \cdot a^3 - b^3 + abb} \propto c$. Дакле, кубни корен се означава са C унутар корена и нажалост не користи већ постојећи тада симбол за једнакост.

Објашњава геометријски како се решавају квадратне једначине. На пример, једначину $z^2 + az = b$, геометријски илуструје цртежом:



Овде је $ML = b$, а $OP = a$. Решење је $z = OM$. Игнорише негативно решење $-PM$.

Главна тема у овом делу је решавање Папусовог проблема о три, односно четири праве. Ради се о томе да се нађе геометријско место тачака за које је производ растојања (под одређеним углом) од две дате праве пропорционално квадрату растојања од треће, у случају да имамо три праве, односно пропорционално производу растојања од друге две. Ту видимо прави почетак аналитичке геометрије.



Декарт:

...покушаћу да дам доказ у неколико речи, пошто сам се већ уморио од толико писања (sic!).

Нека су AB , AD , EF , GH ,... задате неке праве и нека се тражи да се нађе тачка C од које се праве CB , CD , CF , CH ,... могу нацртати тако да формирају дате углове CBA , CDA , CFE , CHG ... редом, са датим правима и такве да је производ неких од њих једнак производу осталих, или бар тако да два производа имају задати однос, пошто овај услов не чини проблем ништа тежим.

Најпре ћу претпоставити да је ствар урађена, и како је толико много линија збуњујуће, могу да поједноставим рад тако што ћу једну од датих правих и

једну од оних које треба нацртати (на пример, AB и BC) као главне праве, помоћу којих ћу покушати да остале изразим. Означимо дуж AB са x , а дуж BC са y ...

Дакле, идеја је да се све остале релевантне дужи изразе преко x и y и да се потом формира једначина. У случају три (четири) праве добија се крива другог реда, док се у случају више правих добијају криве виших редова. Одмах треба рећи да Декарт не говори експлицитно о координатама (које је касније увео Лајбниц), нити обавезно сматра да се ове изабране, главне праве, секу под правим углом. Осим тога, x и y су му увек позитивни бројева. Дакле, нема правоуглог координатног система код Декарта. Но, видимо претечу координатног система и доста тога што уз то долази.

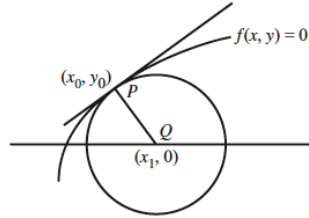
Други део *Геометрије* има наслов „О природи кривих линија”. У њему Декарт говори о геометријским и механичким кривама (односно, како их од Лајбница називамо, алгебарским и трансцендентним). Од допушта посматрање и других (алгебарских) кривих сем правих, кружна, конусних пресека, уколико су оне задате на прецизан начин. А под тим подразумева да се оне добијају у пресецима две праве које се паралелно померају са самерљивим брзинама (дакле, раније разматрана трисектриса отпада, а и ми знамо да то није алгебарска крива). На тај начин се добијају праве чија је једначина $f(x, y) = 0$, где је $f(x, y)$ полиномна функција.

Декарт разматра проблем налажења нормале (а тиме и тангенте) на криву у задатој тачки.

Овде ћу дати довољан увод у проучавање кривих када будем дао општи метод за цртање праве линије која заклапа праве углове са кривом у произвољној њеној тачки. И усуђујем се да кажем да је ово не само најкориснији и најопштији проблем у геометрији који ја знам, него и који икада желим да знам.

И поред похвалних речи о свом методу, ипак такво налажења нормала није најефикасније. Проблем је повезан са налажењем тангенте на криву у датој тачки, а метод за то је развио Ферма у отприлике исто време.

Позабавимо се Декартовим методом.



Нека је $f(x, y) = 0$ једначина криве и нека се тражи нормала у тачки $P(x_0, y_0)$. Претпоставимо да је та нормала нацртана и нека сече изабрану x -осу у тачки $Q(x_1, 0)$ (ми овде користимо наравно наше ознаке, укључујући и координате због лакшег записа). Једначина кружице са центром у Q која пролази кроз P је

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x_0 - x_1)^2 + y_0^2.$$

Када елиминишемо y из ових једначина, добијамо једначину $g(x, x_1) = 0$ и бирамо x_1 тако да је x_0 двоструки корен ове једначине. Урадимо ово на примеру параболе $y^2 = ax$ у тачки (a, a) . Једначина круга је

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (a - x_1)^2 + a^2.$$

Елиминисањем y из ове две једначине (постављањем $y^2 = ax$) добијамо

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (a - x_1)^2 + a^2,$$

односно

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = 0.$$

Како имамо двоструки корен, Декарт ову једначину изједначава са једначином $(x - r)^2 = 0$ за неко r (ми знамо да мора бити $r = x_0$). Стога мора бити

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = x^2 - 2rx + r^2,$$

те је $a - 2x_1 = -2r$, а $2a(x_1 - a) = r^2$. Но, како је $r = x_0 = a$, добијамо да је $x_1 = 3a/2$. Одавде се наравно лако добија једначина нормале, то је права кроз тачке (a, a) и $(3a/2, 0)$, а потом и једначина тангенте (права кроз (a, a) нормална на нормалу).

Ово је једноставан случај, али у случају сложенијих примера уочава се мана Декартовог метода који нема ефикасан општи начин за установљавање чињеница да ли полиномијална једначина

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

има двоструки корен r . Декарт то, у примерима у *Геометрији*, ради тако што горњи полином изједначи са полиномом

$$(x-r)^2(b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n),$$

што доводи до доста рачунања. Ми данас знамо да је то повезано са првим изводом, но код Декарта тога нема.

Декарт у *Геометрији* изоставља многе ствари, не даље довољно објашњења. Стога је холандски математичар ван Схутен то дело превео на латински, додајући многа објашњења и оно је знатно обимније од оригиналног Декартовог дела. Било је више латинских издања овог дела. У издању 1659-1661. додат је погодан начин за одређивање двоструких корена који је развио ван Схутенов ученик Јонанеш Хаде (који је иначе био градоначелник Амстердама 30ак година). Ево Хадеовог правила.

Уколико је r двоструки корен једначине

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

онда је r такође корен једначине

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_nb_n = 0,$$

где бројеви b_0, b_1, \dots, b_n чине аритметички низ. Остављамо читаоцима да провере да ли је ово тачно и ако јесте, зашто, а ми ћемо дати један пример. Посматрамо једначину

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

и узмимо аритметички низ 3,2,1,0. По Хадеу, ако је r корен ове кубне једначине, он је корен и једначине

$$3x^3 - 10x^2 + 8x = 0,$$

односно квадратне једначине

$$3x^2 - 10x + 8 = 0,$$

пошто је јасно да 0 није корен кубне. Један корен ове квадратне једначине је 2, а онда се може проверити да је он и корен кубне једначине, те је то заиста двоструки корен на основу Хадеовог правила.

Трећи део *Геометрије* носи наслов „О решавању просторних и натпросторних проблема”. Овај део је алгебарског карактера и тиче се решавањем алгебарских једначина трећег и виших редова.

Ту Декарт примећује да је $x = a$, корен једначине $f(x) = 0$, где је $f(x)$ полином, ако и само ако $x - a$ дели $f(x)$. Занимљиво је да негативне корене назива ’лажним’ коренима („мање од ничега”). Истиче

да горенаведена једначина може имати највише онолико решења колики је степен полинома $f(x)$, али каже да не морају сва решења бити реална, нека су „имагинарна”.

Овде налазимо и експлицитно формулисано правило знака (касније названо Декартово правило знака), то је раније било имплицитно (рецимо код Кардана). Наиме, ако имамо полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где је $a_0 > 0$, онда је број позитивних реалних корена једначине $f(x) = 0$ највише једнак броју промене знака чланова низа a_0, a_1, \dots, a_n . На пример, код једначине

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

имамо коефицијенте $1, -4, -19, 106, -120$, чији су знаци $+, -, -, +, -$, те имамо три промене знака и закључујемо да имамо највише три позитивне нуле. Декарт каже да једначина може имати највише онолико 'лажних' (негативних) корена, колико се пута појављују парови $+, +$ и $-, -$. У нашем случају, имамо једно појављивање, те имамо највише једна негативан корен. Заправо, овде су позитивни корени 2, 3 и 4, док је негативан корен -5 .

Касније су му неки замерали да је тврдио да се тако тачно одређује број позитивних, односно негативних корена, но идеја је ту да се да процена. Тачно је да има највише толико, а може да има паран број пута мање него што је број промене знака.

Разматра и одређивање рационалних нула и показује како се може смањити степен једначине. На пример, за једначину

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

примећује да је последњи, како каже, члан 64, дељив са 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, те стога треба проверити да ли је тај полином дељив са $y^2 - 1$, $y^2 + 1$, $y^2 - 2$, $y^2 + 2$, $y^2 - 4$, итд. Открива да је дељив са $y^2 - 16$ и добија количник $y^4 + 8y^2 + 4$ (описујући детаљно поступак дељења).

Посебно је занимљив његов метод решавања једначине четвртог степена. Најпре наравно провери да ли можда може да је сведе на једначину нижег степена, тако што одреди неки корен, а ако не може, онда је редукује на облик у коме нема члана уз трећи степен (елиминирање, како каже, други члан). И онда

... Уместо

$$+x^4.pxx.qxr = 0$$

пишемо

$$+y^6.2py^4 + (pp.4r)yy - qq = 0.$$

О чему се овде ради? Наравно, он уместо, на пример x^2 пише x и то смо оставили, знак једнакости који користи смо осавременили, а тачкица му означава знак, данас бисмо ту писали \pm . Но, одакле му та нова једначина. Ево у чему се ради.

Покушајмо да факторишемо $x^4 + px^2 + qx + r$ као производ два тринума

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + yx + m)(x^2 - yx + n).$$

Ово се може покушати зато што је коефицијент уз x^3 једнак нули. Добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} p &= n - y^2 + m \\ q &= yn - ym \\ r &= mn. \end{aligned}$$

Наравно, ако би имали $y = 0$, било би и $q = 0$, те би почетни полином био квадратни по x^2 (биквадратни како данас кажемо) и лако бисмо га факторисали. Стога, нека је $y \neq 0$. Из прве две једначине добијамо

$$n + m = y^2 + p \tag{1}$$

$$n - m = \frac{q}{y}. \tag{2}$$

Стога је

$$2n = y^2 + p + \frac{q}{y} \tag{3}$$

$$2m = y^2 + p - \frac{q}{y} \tag{4}$$

, те је

$$4r = 4mn = 2m \cdot 2n = \left(y^2 + p + \frac{q}{y}\right) \left(y^2 + p - \frac{q}{y}\right) = y^4 + 2py^2 + p^2 - \frac{q^2}{y^2}.$$

Множењем са y^2 и сређивањем, добијамо једначину

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Дакле, на тај начин се добија та помоћна једначина. То је кубна једначина по y^2 и ако можемо да нађемо неко њено решење, онда можемо да извршимо и тражену факторизацију. Погледајмо следећи пример.

Решити једначину

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$$

Помоћна једначина је

$$y^6 - 34y^4 + ((-17)^2 - 4(-6)) - (-20)^2 = 0,$$

односно

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0.$$

Посматрањем делиоца броја 400, добија се да бином $y^2 - 16$ дели горе-наведени полином шестог степена, те заправо можемо за y узети $y = 4$ (нама треба једно y , не морамо тражити све могућности). Одатле добијамо $m = 2$ и $n = -3$. Стога имамо факторизацију

$$x^2 - 17x^2 - 20x - 6 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x - 3),$$

а одавде и

$$x^2 - 17x^2 - 20x - 6 = (x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{7})(x + 2 + \sqrt{7}).$$

За вежбу препоручујемо читаоцима да реше једначину

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$$

овим методом.

Декарт је постао познат широм Европе и 1649. млада шведска краљица Кристина позвала га је да је учи филозофију. Такође је навела да би јој користила његова помоћ у формирању академије наука која би била конкурентна најбољим академијама у Европи. Он је на крају ипак прихватио њен позив, мада се дуго предомишљао, и то се показало као погубно по њега. Краљица је навикла да устаје рано, у 5 сати и тада је тражила да буду часови са њим. Осим тога, осећала је презир према хладноћи и просторије у којима је Декарт у рано јутро, када није навикао да ради, с њом радио, нису биле ни грејане. Почетком фебруара 1650. године добио је прехладу, која се развила у упалу плућа и преминуо је после десетак дана.

Његове идеје из физике нису одговарале физичкој стварности, мада су у Француској покушавали да их одрже живим још неких педесетак година због националног поноса. Но, временом су, чак и у Француској, Њутнове идеје однеле примат.