Италијанска алгебра

Зоран Петровић

12. април 2021. године

Леонардо из Пизе

Леонардо из Пизе (око 1170–1240) рођен је у граду-државиПиза. Његов отац се звао Гиљермо, а Леонардо је наводио да је потомак Бонаћија, који је највероватније био неки давни предак. У то време је позивање на познате претке било правило у Италији. Он је сам себе називао Леонардо Пизански Биголо и када је 1240. године добио званичне почасти од града Пизе за службу као финансијски саветник, у том документу је баш то стајало. Било је много покушаја да се објасни то име Биголо, али није нам то много важно. Но, надимак Фибоначи посвему судећи потиче од једног историчара математике из 1838. године. Нема никаквих доказа да је сам Леонардо икада користио то име, али ето то је остало и под тим надимком је и најпознатији.

Више италијанских градова-држава у то време је имало веома развијену трговину са исламским светом и Пиза је била један од њих. Леонардов отац је добио важну позицију у једном граду у садашњем Алжиру 1192. године и повео је свог сина са собом да изучи трговачке вештине. Добио је одличну подуку из математике и тамо је научио рачун помоћу Индо-арапских цифара. Писао је да му се то веома допало и да је наставио са изучавањем математике и у даљим путовањима по Египту, Сирији, Византији, Сицилији и Прованси.

Леонардо се у Пизу вратио 1200. године и у наредних 25 година написао неколико дела. Она која су остала сачувана су

1. *Liber abbaci* (1202, редиговано 1228),
2. *Practica geometriae* (1220),
3. *Flos* (1225).
4. Писмо филозофу Теодорусу, који је живео на Сицилиији на двору Фридриха II, цара Светог римског царства,
5. *Liber quadratorum* (1225).

Даћемо кратак преглед неких од ових дела. Почнимо од најчувенијег и најобимнијег *Liber abbaci*, тј. *Књиге о рачунању*. Ова књига има 15 глава

Првих 7 глава књиге посвећено је рачунању у декадном систему базираном на Индо-арапским цифрама уз додати знак 0 за нулу. Велики број примера, детаљно описаних речима може се ту наћи. Ево, на пример, како Леонардо описује дељење броја 9000 бројем 7. Он све описује речима, а ми ћемо приказати поступак симболима. Најпре каже да се 7 испише испод прве нуле:

$$\begin{array}{l} 9000 \\ 7 \end{array}$$

Затим каже да се 9 дели са 7; количник је 1, а остатак 2 и стога 1 треба писати испод 9, а 2 изнад 9:

$$\begin{array}{l} 2 \\ 9000 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

Сада се та двојка споји са нулом која је иза 9, те се тако добијен број 20 дели са 7. Количник је 2, а остатак 6. Знамо већ где их пишемо.

$$\begin{array}{l} 26 \\ 9000 \\ 7 \\ 12 \end{array}$$

Настављамо поступак.

$$\begin{array}{l} 264 \\ 9000 \\ 7 \\ 128 \end{array}$$

Најзад, 40 при дељењу са 5 даље количник 5, који се пише испод одговарајуће нуле

$$\begin{array}{l} 264 \\ 9000 \\ 7 \\ 1285 \end{array}$$

док се остатак 5 пише изнад разломачке црте над 7. И тако се добија резултат: $\frac{5}{7}1285$. Да? Није грешка, Леонардо овако пише мешовити број, најпре разломљени део, а после цео део. То је сигурно под утицајем арапског писма које се пише здесна улево.

Дакле, имамо заиста разломачку црту, разломке, но Леонардо има и овакве записе:

$$\frac{2\;4\;4}{3\;5\;5}9.$$

Шта је сада ово? Можда ће јасније бити када на овакав начин напишемо, на пример, број $2{,}3478$:

$$\frac{8\;\;7\;\;4\;\;3}{10\,10\,10\,10}2.$$

Дакле:

$$2{,}3478 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10\cdot 10} + \frac{7}{10\cdot 10\cdot 10} + \frac{8}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10},$$

а

$$\frac{2\;4\;4}{3\;5\;5}9 = 9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 5\cdot 3}.$$

Чему служе ови сложени разломци, каква је то 'егзотика'? Но, главе 8–11 садрже проблеме који се тичу трговине, а разне мерне јединице, укључујући новчане, нису биле тако правилне као данас. Усталом, и сада имамо тај англосаксонски систем:

1 лига = 3 миље; 1 миља = 8 фурлонга; 1 фурлонг = 10 ланаца; 1 ланац = 22 јарде; 1 јард = 3 стопе; 1 стопа = 12 инча.

Добро, лига се више не користи, а и постоји сада 1000ти део инча, но...

Дакле, 3 лиге, 2 миље, 4 фурлонга, 6 ланаца, 11 јарди, 2 стопе и 5 инча је, по Леонардовом запису:

$$\frac{5\;\;2\;\;11\;\;\;6\;4\;2}{12\;3\;22\;10\;8\;3}3 \text{ лиге} \qquad ☺.$$

Ако читате старије књиге, онда можете да погледате и како је било са новчаним јединицама. Код Леонарда има велики број задатака који се тичу трампе, конверзије валута и слично. Уз коришћење оваквих записа.

У главама 12 и 13 има више забавних проблема, али је наслов главе 13 посебно занимљив:

> Овде почиње глава тринаест о методу елшатајм и како се њим скоро сви проблеми у математици решавају.

Добро, шта је тај метод? Назив потиче из арапског и значи две грешке. Идеја је да се при решавању једначине $f(x) = c$ израчунају вредности функције f у неке две тачке a и b (то су те две грешке), да се постави права кроз те две тачке и тако се одреди приближно решење. Прецизније, ако желимо да решимо једначину

$$f(x) = c,$$

онда је њено приближно решење x' дато са:

$$\frac{x'-a}{b-a} = \frac{c-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Дакле, ради се о линеарној интерполацији. Још у египатској математици је, за решавање линеарних једначина $ax = b$ коришћена метода (једне) погрешне претпоставке, где се за x узима нека погодна вредност, па се онда она поправља. Метода две погрешне претпоставке је дуго времена коришћена за решавање једначина облика $ax + b = c$. Нама то сада изгледа крајње необично, али тако је било. Наравно у овом случају се добија тачно решење пошто се ради о правој. У случају полинома добија се приближно решење.

У глави 14, Леонардо се бави рачунањем квадратних и кубних корена. За квадратне корене користи добро познату апроксимацију:

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a},$$

док за кубне корене користи две апроксимације. Најпре

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a_1,$$

док је друга апроксимација:

$$a_2 = a_1 + \frac{a - a_1^3}{3a_1(a+1)}.$$

Заправо, као што се можете лако уверити, прва апроксимација је добијена методом две грешке (решава се једначина $x^3 = a^3 + r$ и рачунају вредности x^3 за $x = a$ и $x = a+1$) и ово је било навођено у делима исламских математичара, док за другу апроксимацију Леонардо каже: „Ја сам изумео овај начин за налажење корена."

Глава 15 је посвећена проблемима у којима се појављују линеарне и квадратне једначине, као и оне које се своде на такве. Наведимо само један пример система једначина који се разматра:

$$y = \frac{10}{x}$$

$$z = \frac{y^2}{x}$$

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Овај систем се своди на квадратну једначину по x^4:

$$x^8 + 100x^4 = 10000.$$

Кратко дело *Flos* (*Цвет*) Леонардо је саставио и послао Фридриху II, који је био велики покровитељ науке и уметности. У њему су између осталог, одговори на нека питања која је, као изазов, Леонарду поставио Ђовани из Палерма, који је био математичар на двору цара Фридриха II, који је тада столовао на Сицилији. Два су питања посебно занимљива.

Први проблем је био да се нађе (рационалан и позитиван) број x такав да су и x^2+5 и x^2-5 потпуни квадрати. Леонардо је, без образложења поступка дао пример: $x=\frac{5}{12}3$:

$$\left(\frac{5}{12}3\right)^2+5=\left(\frac{1}{12}4\right)^2, \quad \left(\frac{5}{12}3\right)^2-5=\left(\frac{7}{12}2\right)^2.$$

Метод је образложен у књизи *Liber quadratorum*.

Други проблем се састојао у решавању кубне једначине:

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

Леонардо је показао да ниједан рационалан број није решење ове једначине, али нису то ни квадратне ирационалности које је разматрао Еуклид у својим *Елементима*. Дакле, ни бројеви облика $\sqrt{a}$, $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, где су a и b позитивни рационални бројеви, нису решења ове једначине. И онда је написао, отприлике, да пошто решења нису бројеви овог типа, он даје приближно решење. Изражено у сексагезималном систему решење које је дао је:

$$1;22,7,42,33,4,40.$$

Он није дао никакво објашњење како је дошао до овог решења. А приближно решење које је дао је изванредно добро. Заправо је развој у сексагезималном систему:

$$1;22,7,42,33,4,38,30,50\ldots$$

Постављају се два питања овде. Како је дошао до овог приближног решења? Зашто је последњи члан у развоју 40? Зашто није 38 или 39, ако је већ решио да заокружи резултат.

Постоје два начина на који је Леонардо могао да дође до овог резултата. Један је метод, који је био познат још одавно у Кини, а који је данас познат као Хорнеров метод за налажење корена оваквих једначина, а други је „метод двоструке грешке”, за који смо видели да га је детаљно разматрао у свом делу *Liber abbaci*.

Који је то Хорнеров метод? Приказаћемо га на наведеном примеру, али ћемо ипак рачунати у децималном систему, јер нам је тако лакше.

Метод се састоји у томе да се постепено формира децимални развој за тражено решење. Приметимо најпре да једначина

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

има само једно позитивно реално решење. Ми то сада знамо лако да покажемо: функција f задата са $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ има извод $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ и он је позитиван за све вредности $x > 0$. Дакле, функција расте. Како је $f(0) = -20 < 0$ и како f неограничено расте, то ће једначина $f(x) = 0$ имати тачно једно позитивно решење. Но, Леонардо је и разматрао само позитивна решења.

Како је $f(1) = -7 < 0$, а $f(2) = 16 > 0$, решење се налази између 1 и 2. Дакле, решење је 1,.... Направимо смену: $x = y+1$. Добијамо једначину по y:

$$y^3 + 5y^2 + 17y = 7$$

и знамо да је решење између 0 и 1, тј. да је облика $0, y_1 y_2 \ldots$. Да бисмо нашли y_1 помножимо једначину са 10^3:

$$(10y)^3 + 50(10y)^2 + 1700 \cdot (10y) = 7000.$$

Смена $z = 10y$ даје нову једначину:

$$z^3 + 50z^2 + 1700z = 7000$$

и знамо да је решење између 0 и 10. Провером установљавамо да је решење између 3 и 4 (овде би било згодно применити Хорнерову шему за рачунање ових вредности, но није нам то сада много важно, јер нису компликовани полиноми са којима баратамо). Дакле, решење је $z = 3,\ldots$, те је решење почетне једначине: $x = 1,3\ldots$. Да бисмо добили следећу цифру, радимо смену $z = u + 3$ и скалирамо:

$$u^3 + 59u^2 + 2027u = 1423,$$

$$(10u)^3 + 590(10u)^2 + 202700 \cdot (10u) = 1423000.$$

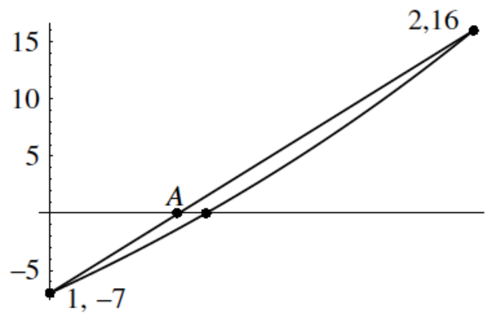
Смена $v = 10u$ даје нову једначину

$$v^3 + 590v^2 + 202700v = 1423000.$$

Није тешко видети да је решење између 6 и 7, те је почетно решење $x = 1,36\ldots$.

Мада се бројеви повећавају, јасно је да можемо овако да наставимо док имамо стрпљења, оловке и папира.

Који је метод користио Леонардо? Наравно, немогуће је са сигурношћу одговорити на ово питање, но других метода није било, а он нигде у својим другим делима није користио овај Руфини-Хорнеров метод, те су истраживачи у области историје математике склони томе да закључе да је користио тај метод „двоструке грешке” коме је посветио значајан део *Liber abbaci*. С обзиром да је функција $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ конвексна, сечица је изнад криве и стога разумне процене позиције корена и итериране апроксимације увек ‘подбацују’, а Леонардово решење ‘пребацује’.



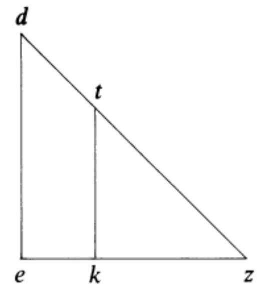
Стога је једна од сугестија истраживача да је он намерно навео тако ту погрешну последњу цифру да не ода метод. Рецимо, баш поменутом Ђованију из Палерма. У то време је било важно неке методе чувати за себе и обезбедити подршку владара или богатих мецена.

Књига *Liber quadratorum* (*Књига о квадратима*) посвећена је проблема представљања бројева у облику сума квадрата, испитивању када су бројеви неког облика квадрати и слично.

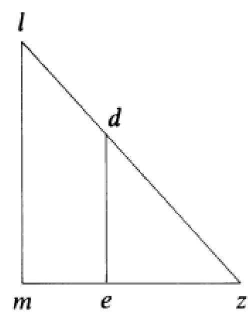
Урадимо за почетак један једноставан пример да видимо како је он то радио и које је ознаке користио. Ради се о петом проблему:

Наћи два броја тако да сума њихових квадрата чини квадрат формиран од суме друга два дата броја.

Нека су два броја $.a.$ и $.b.$ дата тако да сума њихових квадрата чини квадратни број $.g.$. Узмимо нека друга два броја чија сума квадрата јесте квадрат. Та два броја су представљена дужима $.de.$ и $.ez.$ и постављени су под правим углом, углом $.dez.$.
Квадрат над дужи $.dz.$ је једнак броју $.g.$ или није. Најпре, ако јесте, онда смо добили решење. Ако није, онда је или мањи или већи од $.g.$. Најпре, ако је већи, онда ће број $.dz.$ бити већи од квадратног корена из $.g.$; стога нека је квадратни корен из $.g.$ једнак броју $.i.$ и постављен дуж $.dz.$ и означен са $.tz.$. Из тачке $.t.$ нацртајмо $.tk.$ која је нормална на $.ez.$; $.tk.$ је стога паралелна $.de.$. Пошто је троугао $.tkz.$ сличан троуглу $.dez.$, $.zd.$ је према $.zt.$ као што је $.de.$ према $.tk.$. Али, однос $.zd.$ према $.zt.$ је познат; обе дужине су заиста познате. Због тога је и однос $.de.$ пре $.tk.$ познат. Такође је и $.de.$ познато. Стога је дуж $.tk.$ позната. Слично се показује да је и дуж $.zk.$ позната. Дакле, познати



су $.tk.$ и $.kz.$ чија је сума квадрата једнака квадрату кога чини дуж $.tz.$. Али, квадрат броја $.tz.$ једнак је квадрату броја $.i.$ а $.i.$ је квадратни корен из $.g.$. Стога је квадрат над $.tz.$ једнак броју $.g.$ и два броја $.tk.$ и $.kz.$ су заиста нађена чија сума квадрата је једнака квадратном броју $.g.$. Алтернативно, нека је $.dz.$ мање од $.i.$.



Продужимо дуж $.zd.$ до $.l.$ и нека је $.zl.$ једнако броју $.i.$. Слично се $.ze.$ продужава и $.lm.$ се повеже тако да је $.lm.$ паралелно са $.de.$.

Довршава доказ исто користећи сличност троуглова и наставља конкретним примером у коме узима да је $.a. = 5$, $.b. = 12$. Стога је $.i. = 13$ и добија после образлозења да је $.tk. = 11\frac{8}{17}$ (сада пишемо на стандардан начин) и $.kz. = 6\frac{2}{17}$. Има и пример за други случај.

Као што смо навели, у овој књизи је приказан и метод којим је решен један од проблема који је поставио Ђовани из Палерма. Проблем се састоји у решавању система једначина (у позитивним рационалним бројевима):

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2.$$

Леонардо разматра општији проблем:

$$x^2 + C = y^2$$

$$x^2 - C = z^2.$$

Ако постоји решење овог проблема, онда број C назива *congruum*, а број x^2 *quadratus congruentus*. Ево како он решава овај проблем. Сабирањем се добија

$$2x^2 = y^2 + z^2.$$

Сменом $y = u + v$, $z = u - v$ горња једначина се своди на

$$x^2 = u^2 + v^2.$$

Дакле, имамо Питагорине тројке (гледамо само природне бројеве сада), те је

$$x = a^2 + b^2, \quad u = 2ab, \quad b^2 - a^2.$$

Леонардо добија следећу теорему.

Ако су a и b узајамно прости и $b > a$, имамо два случаја.

1. Ако су a и b непарни, онда је $C = ab(b-a)(b+a)$ *congruum*, а конгруентни квадрат је $x^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$.

2. Ако су a и b различите парности, онда је $C = 4ab(b-a)(b+a)$ конгруум, а конгруентни квадрат је $x^2 = (a^2+b^2)^2$.

За $a = 1$, $b = 9$, добија: $C = 720 = 5 \cdot 12^2$, $x = 41$, $y = 49$, $z = 31$. Дељењем са 12, добија наведено решење за $C = 5$. Истим методом добија решења и за друге вредности C.

Лука Паћоли

Лука Паћоли (1447–1517) написао је значајно дело *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*. Оно је написано на италијанском, не на латинском 1487, а штампано је у Венецији 1494.

Лука Паћоли је користио напреднију алгебарску нотацију од Леонарда. То је опет варијанта скраћеничке алгебре. За квадратни корен је користио ознаку R (Radix), или $R2$, а за кубни $R3$. Четврти степен је био RR, или $R4$. Непозната у једначини се означавала са co. (cosa), њен квадрат са ce. (censo), куб са cu. (cubo), четврти степен са ce.ce.. Ако би постојала још једна непозната, она би се звала quantità. За сабирање се користила ознака p, а за одузимање m. На пример,

$$\sqrt[3]{34 - \sqrt{12}}$$

би се писало као

$$R3V34\tilde{m}R12.$$

Ознака V показује да се корен односи на све иза њега (*V=U=Universale*). На крају књиге је написао да је за једначине типа

numero, cosa e cubo;
numero, censo i cubo;
numero, cubo e censo de censo

за сада нико није успео да формира општа правила. Дакле, овде се ради о једначинама трећег и четвртог степена.

Решавање једначина трећег степена

Сваку једначину трећег степена можемо свести на облик

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Сменом $x = y - \frac{a}{3}$ добијамо:

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0,$$

односно

$$y^3 - 3y^2\frac{a}{3} + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^3}{27} + ay^2 - 2\frac{a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

Видимо да се квадратни члан скрати. Ово је наравно било добро познато, те су се, с обзиром да се нису користили негативни коефицијенти, све једначине трећег степена сводиле на један од три типа:

(1) $x^3 + px = q$,

(2) $x^3 = px + q$,

(3) $x^3 + q = px$,

где су, наравно, p, q позитивни бројеви. Први математичар који је нашао решење за једначину типа (1) био је Сципион дел Феро (1465–1526). Сматра се да је он до тог решења дошао око 1515. године. Био је професор у Болоњи и своје решење нигде није објавио, само га је на самрти саопштио свом зету Ханибалу Навеу и свом ученику Антонију Фјореу.

Дакле, и у то време, па и знатно касније, математичари нису увек желели да објаве своје резултате. Њихове позиције нису биле сигурне, морали су да се доказују. Једна од форми доказивања у ренесансној Италији била је у форми математичких двобоја.

Николо Фонтана (1500–1557), познатији као Тартаља (Муцавац) био је самоук математичар. Рођен је у Бреши на северу Италије. Када је био мали, Французи су заузели Брешу и један француски војник га је ранио тако да је цео живот имао ожиљак на лицу и имао је проблема са говором. Тада му је и отац убијен. Мајка се трудила да га школује, али нису имали новца за то. Како пише у његовим биографијама, у школи је био док нису стигли до слова „к”, те није у школи ни научио да напише своје име. Но, школовао се самостално и успео је да обезбеди позицију приватног учитеља рачуна. Био је и веома успешан у тим математичким двобојима.

Тартаљин пријатељ му је 1530. послао два проблема, који се своде на следеће:

1. Решити једначину $x^3 + 3x^2 = 5$.
2. Решити једначину $x(x+2)(x+4) = 1000$.

Тартаља се добро помучио и успео да реши ове задатке те је објавио да може да реши сваку једначину типа $x^3 + px^2 = q$.

Фјоре је сматрао да он блефира и 1535. га је изазвао на двобој. Свако од њих је требао да зада другоме 30 задатака, а поражени је морао да плати 30 вечера за победника и његове пријатеље. Победник би био онај који реши више задатака за 50 дана. Тартаља је сазнао да се сви проблеми које је Фјоре саставио своде на решавање једначине типа (1). Стога се максимално потрудио да нађе решење за тај тип. Успео је у томе и све проблеме које му је Фјоре поставио решио је за неколико сати, док Фјоре није успео да реши већину проблема које је за њега саставио Тартаља (проблеми су били различитог типа, један је чак био скривено у вези са овим типом једначине и Тартаља га је поставио зато што је био убеђен да Фјоре не разуме суштински проблеме који се ту појављују). Наводно је Тартаља био толико задовољан својим тријумфом да је ослободио Фјореа обавезе да плати тражене вечере.

Тартаља је сада знао да решава једначине сва три типа и није имао намеру да објави ово решење. У причи се сада појављује Ђироламо Кардано (1501–1576) — лекар, изумитељ, астролог, математичар, шахиста, коцкар. Један од његових изума и сада се користи у аутомобилима – „кардан” заиста носи име по њему. Написао је и књигу о игри коцком, то је можда и прва књига посвећена теорији вероватноће. Кардано је позвао Тартаљу да му открије своје решење. На крају је успео да га убеди да Тартаља дође код њега у Милано, где ће га Кардано упознати са војним заповедником Милана што је доста значило Тартаљи, јер је имао неке замисли које је желео да покаже дотичном маркизу. У сваком случају, Кардано је успео да убеди Тартаљу да му открије свој метод. Обавезао се да неће то објавити пре него што га Тартаља сам објави. Тартаља је саопштио решење у облику песмице. Упуцтво је било једноставно: напиши q у облику $q = u - v$, при чему су u и v такви да је $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Тада је решење $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. У остала два случаја се бирају u и v тако да је $q = u + v$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ и решење је $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Да проверимо:

$$\begin{aligned}
x^3 + px &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{u v^2} - v + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q - 3\frac{p}{3}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q.
\end{aligned}$$

Наравно, и остали случајеви се лако провере.

Кардано и његов ученик Лодовико Ферари (1522–1565) даље су развијали овај метод. Ферари је чак успео да тако реши и једначину четвртог степена и они су желели да објаве те резултате, али их је обећање Тартаљи спречавало у томе. Но, сазнали су да је Сципион дел Феро имао решење и отишли су у Болоњу да то провере у његовој заоставштини. Када су сазнали да је то заиста тако, Кардано је сматрао да више није обавезан прем Тартаљи и 1545. објављује дело *Ars Magna* (*Велика вештина*). У том делу описује решавање једначина трећег и четвртог степена. Наводи да је метод за решење једначине трећег степена сазнао од Тартаље, а да је метод за решавање једначине четвртог степена развио Ферари. Тартаља је био огорчен због тога, кренула је бујица оптужби. Све се то завршило дуелом Тартаље и Ферарија у коме су они расправљали о математичким проблемима. Јасно је да је млађи Ферари био у великој предности у односу на старијег и нимало речитог Тартаљу, који је био поражен и понижен тим дуелом.

Ми се враћамо на тему како је Кардано приказао овај метод. Он је то мало модификовао. Ево како је то било на примеру из његове књиге. Посматра једначину

$$x^3 + 6x = 20. \tag{1}$$

Наравно, он користи реторичку алгебру, све се ово објашњава речима. Он мотивише све геометријским разматрањима у простору, одговарајућим коцкама, но ми ћемо то прескочити. Оно што је важно је да он тражи решење у облику $x = u - v$. Када се ово замени у горњу једначину добије се:

$$(u^3 - v^3) - (3uv - 6)(u - v) = 20.$$

Он сада тражи да је

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$3uv = 6.$$

Добија систем

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$u^3 v^3 = 8.$$

Тада је $u^3 = \sqrt{108} + 10$, а $v^3 = \sqrt{108} - 10$ и коначно

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Овде већ можемо да уочимо проблем. Знамо да једначина (1) има тачно једно позитивно реално решење. Но, лако се види да је то решење заправо $x = 2$. А ми смо добили веома сложен израз за то решење у коме је тешко препознати да је заиста $x = 2$. Тартаља је био свестан овог проблема, зато је и веровао да Фјоре суштински не разуме шта се ту све дешава. Но, ми можемо да се снађемо овде. Наиме, приметимо да је $108 = 4 \cdot 27$, те је $\sqrt{108} + 10 = 6\sqrt{3} + 10$. Да ли можемо да нађемо неки број чији је ово трећи степен? То заправо није тешко наћи:

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10.$$

Но, тада је и $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10 = \sqrt{108} - 10$. Дакле, $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{3} + 1$, $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} - 1$, те је заиста решење:

$$x = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2.$$

Наравно, нама сада не би било тешко да изведемо и опште решење, те да добијемо познате *Карданове формуле*, но уместо тога погледајмо још један пример. Посматрајмо једначину

$$x^3 = 15x + 4. \tag{2}$$

Ово је једначина другог типа и овде је згодно решење тражити у облику $x = u + v$. Дакле,

$$(u + v)^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$3uv(u + v) + (u^3 + v^3) = 15(u + v) + 4.$$

Тражимо u и v тако да је $3uv = 15$, $u^3 + v^3 = 4$. Добијамо систем по u^3, v^3:

$$u^3 v^3 = 125$$

$$u^3 + v^3 = 4.$$

Овде је занимљиво да споменемо маестра Антонија из Фиренце (XIV век). Он је систем једначина

$$st = c$$

$$s + t = d$$

решавао тако што је решење тражио у облику $s = a + \sqrt{b}$, а $t = a - \sqrt{b}$. Наравно, ово је потпуно коректно, а и врло је згодан метод за решавање оваквог система. Искористимо га. Дакле, наш систем је

$$st = 125$$

$$s+t=4.$$

Ако узмемо да је $s=a+\sqrt{b}$, а $t=a-\sqrt{b}$ добијамо да је $2a=4$, тј. $a=2$, док је $a^2-b=125$, тј. $b=-121$. Дакле, $u^3=2+\sqrt{-121}$, а $v^3=2-\sqrt{-121}$, те је

$$x=u+v=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Застанимо мало и погледајмо поново нашу почетну једначину. Није тешко видети да једначина $x^3=15x+4$ има за решење $x=4$ и да је то заправо једино позитивно реално решење. Осим тога, може се проверити да ова једначина има три различита реална решења. А ми добисмо нешто прилично компликовано, ситуација је, да се тако изразимо, још гора него у претходном примеру, пошто смо добили квадратни корен из негативног броја. И сада имамо следеће: избегавали смо негативне бројеве уопште, а добили смо решење у коме се појављује чак и квадратни корен из негативног броја. Заправо, овако нешто ће се појавити увек у случају када једначина има три различита реална решења! То је такозвани *несводљив случај*.

Кардано је био свестан овог проблема и трудио се да га избегне у примерима које је дао у својој књизи. Ипак, на једном месту је допустио и корен из негативног броја. Разматрао је проблем растављања броја 10 на два дела чији је производ 40, односно систем једначина

$$x+y=10$$

$$xy=40.$$

Он је написао да је јасно да је то немогуће, али да ипак радимо. Добио је бројеве $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Каже: „Ако оставимо по страни ментално мучење, када помножимо $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$ добијамо 40... Ово је заиста софистика (мудровање)." По свему судећи, Кардано је био први математичар који је увео комплексне бројеве $a+\sqrt{-b}$, али се није осећао нимало пријатно у вези тога.

Рафаел Бомбели се, кратко, позабавио овим проблемом и то ћемо размотрити нешто касније.

Решавање једначина четвртог степена

Општа једначина четвртог степена

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

може се сменом $x=y-\frac{a}{4}$ свести на једначину у којој недостаје кубни члан. Наравно, с обзиром на избегавање негативних бројева, за математичаре у Италији у XVI веку било је више случајева. Основна идеја

Ферaријевог метода је да се додавањем погодних израза једначина сведе на облик

$$(x^2+e)^2 = (fx+g)^2.$$

Размотрићемо пример из Карданове књиге:

$$x^4+6x^2+36 = 60x. \tag{3}$$

Да би добио потпун квадрат са леве стране, додаје $6x^2$ на обе стране:

$$x^4+12x^2+36 = 6x^2+60x,$$

тј.

$$(x^2+6)^2 = 6x^2+60x.$$

Кардано наводи следећу формулу коју детаљно образлаже геометријски, али ми ћемо прескочити то образложење:

$$(x^2+a+b)^2 = (x^2+a)^2+2x^2b+2ab+b^2.$$

У нашем случају је

$$(x^2+6+b)^2 = (x^2+6)^2+2x^2b+12b+b^2.$$

Дакле, на обе стране једначине (3) додаје се $2bx^2+12b+b^2$. Добијамо

$$(x^2+6+b)^2 = (6x^2+60x)+(2bx^2+12b+b^2),$$

односно

$$(x^2+6+b)^2 = (2b+6)x^2+60x+(b^2+12b). \tag{4}$$

Да би квадратни бином са десне стране био потпун квадрат, потребно је и довољно да је

$$4(2b+6)(b^2+12b) = 60^2,$$

односно

$$b^3+15b^2+36b = 450.$$

Дакле, решавање једначине четвртог степена своди се на решавање помоћне једначине трећег степена. Та помоћна једначина се назива и *разрешавајућа кубика*. Смена $b = c-5$ кубну једначину своди на

$$c^3 = 39c+390.$$

Метод који смо приказали раније даје:

$$c = \sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+\sqrt[3]{190-\sqrt{33903}},$$

а одатле се добија и b. Једначина (4) сада је облика

$$(x^2+6+b)^2 = (2b+6)\left(x+\frac{15}{b+3}\right)^2$$

и она се лако решава. Наравно, резултат не изгледа лепо, али то је тако.

Рафаел Бомбели

Рафаел Бомбели (1526–1572) написао је веома значајну књигу *Algebra*. Рођен је у Болоњи и није имао формално математичко образовање, а по професији је био архитектонски инжењер. Био је веома импресиониран Кардановим делом, но сматрао је да Кардано није увек био јасан у својим објашњењима и стога је решио да сам напише књигу из које би почетници могли да овладају алгебром без помоћи других књига. Но, тај посао је потрајао, јер је у међувремену у његов посед дошао грчки рукопис Диофантове *Аритметике* и он је био толико одушевљен тим делом да је решио да га преведе. На крају је текст његове *Algebre* штампан у Венецији непосредно пред његову смрт 1572. године и касније у Болоњи 1579.

У свом делу позабавио се и апроксимацијама квадратних ирационалности верижним разломцима. Да би изразио $\sqrt{2}$, он је записао

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}. \tag{5}$$

Одавде добија да је $y = 1 + \sqrt{2}$. Додавањем 1 на обе стране једнакости (5) добија:

$$y = 2 + \frac{1}{y} \tag{6}$$

Заменом (6) у (5) добија

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}.$$

Следећа замена даје

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}.$$

Занемарујући $\frac{1}{y}$ добија апроксимације за $\sqrt{2}$: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ итд. Разматрао је и развоје за друге квадратне ирационалности.

Оно што нас највише занима је његова дискусија о горенаведеном примеру. Он каже да су заиста корени из негативних бројева софистички, али да сама једначина није спорна, јер има решење $x = 4$. Стога он каже да се можда $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ може изразити у погодном облику:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}.$$

Затим анализира ту ситуацију и некако успева да добије да се за p може узети 2, а за q јединица. Заправо је $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. Тако да добија да је

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-121}) + (2 - \sqrt{-121}) = 4$$

и са задовољством констатује: „У почетку ми се чинило да је цела ствар више базирана на софизму него на истини, али трагао сам док нисам нашао доказ."

Бомбели је увео и ознаку $\sqrt{-1}$: *più di meno*, док је $-\sqrt{-1}$ означавао као *meno di meno*. У једначинама је користио скраћенице: *p. di m.*.