Индијска математика 2; исламска математика 1

Зоран Петровић

29. март 2021.

Аријабата

Аријабата (476–550) је значајан индијски математичар и астроном чије је најпознатије дело *Аријабатија* написано у стиху и завршено 499. године. То дело представља преглед дотадашњих знања, но оно је неуједначено по квалитету. Ту има и тривијалних резултата, као и погрешних, али и резултата велике вредности. Почиње навођењем назива степена броја 10 све до десетог степена и правилима за рачунање квадратних и кубних корена. Потом следе правила за мерење и ту имамо и тачне резултате и погрешне. На пример, наводи се да је површина троугла половина производа дужине једне странице и њој одговарајуће висине, али се тврди да је запремина пирамиде половина производа површине базе и висине. Такође, исправно се наводи да је површина круга једнака производу обима круга и половине полупречника, али и да је запремина сфере (кугле) једнака производу површине великог круга и квадратног корена те површине. Дата је и исправна формула за површину трапеза, али и потпуно произвољно тврђење о површини ма које равне фигуре. Резултат на који су индијски аутори посебно поносни је следећи:

Сабери 4 и 100, помножи са 8 и додај 62000. Тако добијаш приближно обим круга пречника 20000.

То нам даје апроксимацију за π:

$$\pi \approx \frac{(4+100)\cdot 8+62000}{20000} = 3,1416.$$

Но, то је заправо вредност за π коју је користио и Птолемеј у Египту. Постоје велике шансе да је Аријабата био под утицајем грчких претходника. Иначе, у Индији се за π често користила и апроксимација $\pi \approx \sqrt{10}$.

У *Аријабатији* налазимо и нека правила за аритметичке низове. На пример, описано је како се налази број чланова аритметичког низа ако је позната његова сума s_n, први члан a_1 и разлика d. Формула коју добијамо из тог описа је следећа:

$$n = \frac{\frac{\sqrt{s_n \cdot 8d + (2a_1 - d)^2} - 2a_1}{d} + 1}{2}.$$

У делу нема ни мотивације ни провере овог резултата. Наравно, ми можемо данас да ово изведемо:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ &= na_1 + d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Добијамо квадратну једначину по непознатој n:

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2s_n = 0.$$

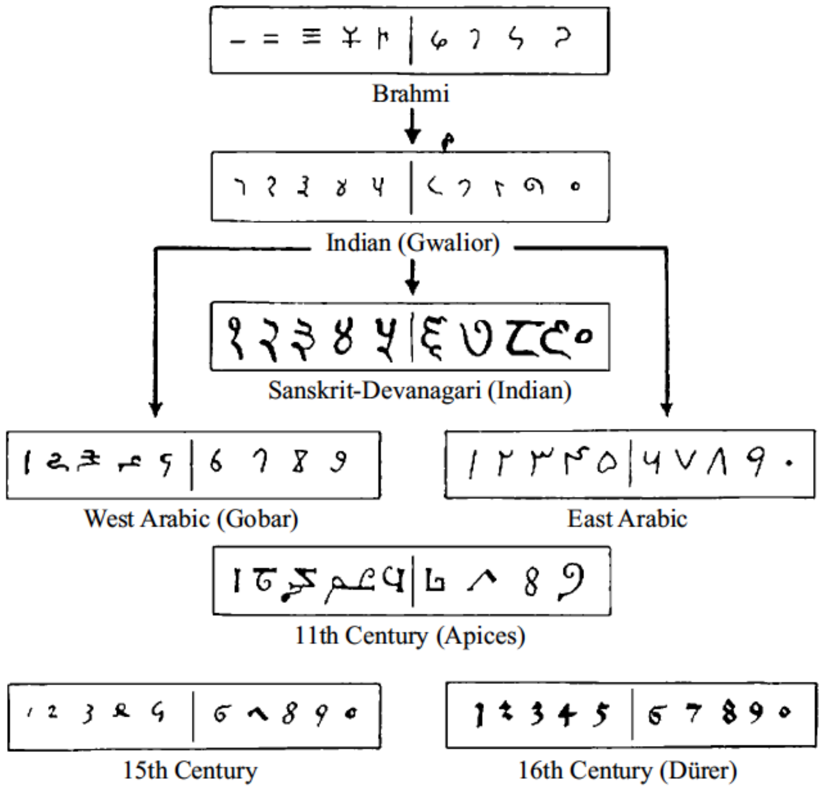
Из ове једначине се добија горња формула (додуше мало у другом облику, проверите то).

Оно на шта наилазимо у *Аријабатији* је децимални систем. Описује се и рачунање у коме се каже и да „од места до места увек је десет пута веће од претходног". Да су се цифре за основу 10 појавиле и пре, видимо и из једне таблице из 595. године, када је један датум записан у декадном облику. Дуг је био пут од првих цифара до наших. Следећа таблица нам даје кратак приказ:

Видимо еволуцију цифара и јасно препознајемо наше цифре у Гобар записима, карактеристичним за западни приказ код Арапа. Но, симбол за нулу није брзо настао. Постојале су свуда разне варијанте решења тог проблема, но по свему судећи прво појављивање нуле у Индији је на једном запису из 876. године. Делује невероватно да је требало више од 250 година, али многе ствари се не развијају у потпуности логично нити равномерно. Занимљиво је навести да се Деванагари запис за цифре и сада користи у Индији.

И у сидантама и у Аријабатији имамо прве таблице синуса. Ево како је то урађено. Ми знамо да је $\sin x \approx x$ када је x мало. Но, овде радимо са радијанима. Ако желимо да радимо са степенима, морамо мало да модификујемо ствари. Заправо, због прецизности је боље радити са минутима. Дакле, идеја је била да имамо исту меру и за синус и за угао. Ако гледамо у минутима, онда је пун круг: $360 \cdot 60 = 21600$. Сада треба наћи полупречник r тако да је $2\pi r = 21600$. Уколико за π узмемо да је $\pi \approx 3,141592$, добијамо да је $r \approx 3437,75$. Стога су Индијци узели да је полупречник круга 3438. То значи да је њихова апроксимација за π овде била приближно $3,14136$.

Када је изабран полупречник круга, онда је прављена таблица вредности $\sin x$, тако што је 90° подељен на 24 једнака дела. Најмањи угао



је дакле био $3\frac{3}{4}^\circ$, што износи 225 минута, те је узето да је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225$. Добро, сад већ видимо да у таблици немамо баш синус угла, али се синус угла лако добија дељењем са полупречником. По тој рачуници је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225/3438 \approx 0{,}06545$. А ако проверите, рецимо дигитроном, добијете да је $\sin 3\frac{3}{4}^\circ \approx 0{,}06540$. Дакле, није лоше за почетак. Ако сада са s_n означимо тај n-ти синус и ако је S_n сума првих n таквих синуса, онда је за рачунање коришћена формула:

$$s_{n+1} = s_n + s_1 - \frac{S_n}{s_1}.$$

Како је добијена та формула, не зна се. Али, да проверимо:

$$s_2 = s_1 + s_1 - \frac{s_1}{s_1} = 449,$$

$$s_3 = s_2 + s_1 - \frac{s_1 + s_2}{s_1} = 449 + 225 - \frac{225 + 449}{225} \approx 671,$$

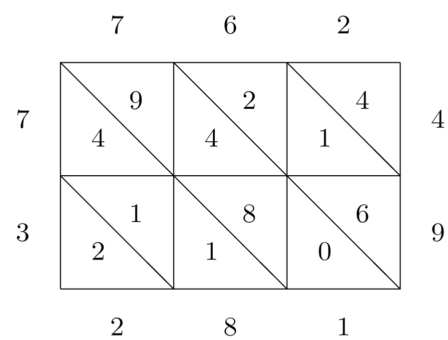
$$s_4 = s_3 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_1} = 671 + 225 - \frac{225 + 449 + 671}{225} \approx 890,$$

$$s_5 = s_4 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{s_1} = 890 + 225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225} \approx 1105.$$

Како s_5 одговара синусу угла од $18\frac{1}{4}^\circ$, по овој таблици бисмо добили да је
$$\sin\left(18\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{1105}{3438} \approx 0{,}32141$$
док нам дигитрон даје приближну вредност $0{,}32144$.

Занимљив начин множења бројева

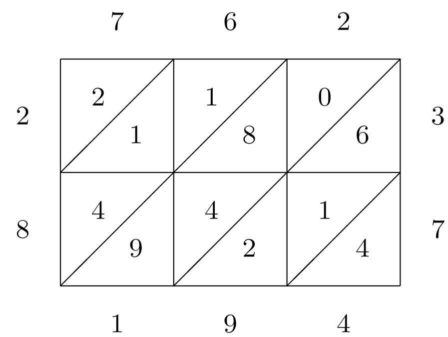
Приказаћемо овде један занимљив начин множења бројева, који се, највероватније најпре појавио у Индији и одатле је пренет у Кину, у Арабију, а потом преко Арабије и у Европу.



Ова таблица показује да је $37 \cdot 762 = 28194$. Како? Видимо да смо формирали производе цифара који се појављују у запису, тако што смо их распоредили у одговарајуће квадрате подељене на два троугла. Број 37 смо исписали одоздо нагоре, а 762 слева удесно. Заправо, таблице се могу и другачије исписивати.

Како су измножене све цифре, онда добијене резултате сабирамо по дијагоналама и исписујемо у наставку. Почињемо од $7 \cdot 2$ (дакле од цифара јединица) и исписујемо цифру 4, пошто се само она налази на тој дијагонали. На следећој дијагонали имамо збир $2 + 1 + 6 = 9$ и 9 смо исписали у наставку. Потом имамо дијагоналу на којој је збир $9 + 4 + 8 + 0 = 21$ и у наставку исписујемо цифру 1, а 2 пребацујемо за сабирање са бројевима у следећој дијагонали. Дакле, имамо потом $2 + 4 + 1 + 1 = 8$, исписујемо 8 у наставку. Коначно, последња дијагонала има само 2, без преноса са претходне и ту пишемо 2.

Битно је било да се крене од производа цифара јединица и да се даље иде по дијагонали. Ако бисмо исписали број 37 са десне стране, онда бисмо квадрате делили на другачији начин да бисмо добили резултат:


7 6 2
2 1 0
1 8 6
4 4 1
9 2 4
2 8
3 7
1 9 4

Брамагупта

Значајни индијски астроном и математичар Брамагупта (око 598–670) живео је око једног века после Аријабате, али се он не наставља на његове резултате. Он је пре свега астроном, али има и довољно занимљивих математичких резултата вредних спомена.

Најпре, код њега први пут наилазимо на експлицитан опис рада са негативним бројевима и нулом. Тако да имамо правила попут тога да производ позитивног и негативног броја даје негативан број, да производ негативног и негативног даје позитиван број, да производ позитивног или негативног броја и нуле даје нулу. Он се не изјашњава око тога шта се добија при дељењу са нулом, сем што наводи да је $0/0 = 0$. Но, не можемо му то толико замерити.

Оно што је посебно значајно је да је он први који је нашао сва целобројна решења једначине

$$ax = by + c, \tag{1}$$

где су a, b, c дати цели бројеви. Он зна да је потребан услов за постојање решења да $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$. Уколико је то тако, може се поделити највећим заједничким делиоцем и сматрати да су a и b узајамно прости. Он такође зна да, ако има једно решење (x_0, y_0), сва друга су дата са $x = x_0 + mb$, $y = y_0 + ma$, где је m цео број. Метод за налажење једног решења у случају да су a и b узајамно прости називао се „кутака" („дробилица"). Тај метод се појављује, али не експлицитно за решавање овог типа једначина, још код Аријабате, објаснио га је боље Баскара I (око 600–680), а и касније је усавршаван. Идеја је да применом Еуклидовог алгоритма a и b смањујемо („дробимо") док не дођемо до остатака 1(и 0), а да онда, на основу добијених количника и остатака добијемо то партикуларно решење. Ево основне идеје.

Претпоставимо да је $b > a$ (то није губљење општости наравно). Поделимо b са a: $b = q_1 a + r_1$. Но, почетна једначина је тада

$$ax = (q_1 a + r_1) y + c$$

и ако узмемо да је $x = q_1 y + z$, онда добијамо

$$aq_1 y + az = aq_1 y + r_1 y + c,$$

односно

$$r_1 y = az - c.$$

Видимо да су се коефицијенти уз непознате смањили, а слободан члан је остао исти (до на знак). Како је сада $a > r_1$ поступак се може поновити. Поступак се понавља све док не дођемо до последњег остатка који није нула, а пошто је то заправо 1 (јер су a и b узајамно прости по претпоставци), долази се до једначине која се лако решава. Затим се то решење 'подиже' до решења почетне једначине и тај поступак је описан. Ми бисмо то све слично и данас радили, али можемо да користимо матрице и онда нам је знатно лакше.

Овде је можда занимљиво напоменути да је Брамагупта за дељење са остатком користио и неке мале 'трикове'. На пример, ако жели да подели 750 са 22, тј. да разломак $\frac{750}{22}$ изрази као мешовити број, онда (у савременим ознакама, он јесте користио разломке, али без разломачке црте, само је бројилац писао изнад имениоца):

$$\frac{750}{22} = \frac{750}{25} \cdot \frac{25}{22} = 30 \cdot \left(1 + \frac{3}{22}\right) = 30 + \frac{90}{22} = 30 + \frac{45}{11} = 34\frac{1}{11}.$$

Дакле, он би именилац заменио већим бројем који дели бројилац и тако поједноставио даљи рачун.

Постоје озбиљне анализе које показују да је Брамагупта у решавању једначине (1) био мотивисан својим астрономским разматрањима, али се ми њима овде нећемо бавити.

Брамагупта се бавио и решавањем неодређене једначине облика

$$x^2 = 1 + dy^2. \tag{2}$$

Једначине тог типа сада се (неоправдано) називају Пелове једначине, а и сам Архимед је повезан са једначином тог типа. Наиме у делу које нисмо разматрали – *Проблем стоке*, он је поставио проблем као изазов александријским математичарима, како рече „онима који се занимају таквим стварима”. У њему се тражи да се одреди број бикова и крава различитих боја (четири боје, дакле има 8 непознатих) који задовољавају разне услове. Сви услове, сем два, су једноставне линеарне везе, но та два захтевају да нека два броја буду троугаони број и потпун квадрат. И то је део који чини проблем изузетно тешким са практичне тачке гледања, јер су решења те једначине уистино веома велики бројеви. Тек у деветнаестом веку имамо нека решења. У сваком случају, Брамагуптин допринос је у томе што је дао метод како да се од два решења добије ново решење. Наиме, ако су (p,q) и (p',q') нека решења једначине (2) , онда је и

$$(pp' + dqq', pq' + qp')$$

такође једно решење. То нама сада није тешко проверити. Треба рећи да је Брамагуптина алгебра била скраћеничког типа, умањилац је означавао тачком изнад њега, већ смо видели како је писао разломке, а и непознате су означаване одговарајућим скраћеницама.

Брамагупта је имао и резултате из геометрије, мада се и код њега налазе једни поред других тачни и нетачни резултати. Од тачних резултата наведимо да је имао формулу за одређивање пречника круга описаног око датог троугла: ab/h_c, ако су a и b странице датог троугла, а h_c висина која одговара трећој. Но, ова формула је заправо синусна теорема у другом облику (појаснити ово) и она је била позната и Птолемеју. За π је користио вредност $\sqrt{10}$, а понекад чак и само 3 као „практичну вредност”. Брамагупта је дао и формулу за површину тетивног четвороугла, која одговара Хероновом обрасцу: ако је s полуобим тетивног четвороугла чије су странице a, b, c и d, онда је површина дата са:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Видимо се добија баш Херонов образац у случају да се четвороугао деформише у троугао, тј. ако је једна од страница једнака 0. Ова формула је и сада позната као *Брамагуптина формула* (изведите ову формулу). Једина мана је у томе што Брамагупта није експлицитно навео да она важи само за тетивне четвороугле. У ранијим временима многима није било јасно да за одређивање четвороугла треба више од 4 елемента. На пример, ако посматрате неки квадрат странице a, онда можете да нађете ромб странице a, који има било коју површину између 0 и a^2.

Баскара II

Најзначајније дело математичара и астронома из XII века Баскаре II (1148–1185) било је *Сиданта Сиромани*. Састоји се од четири дела, а прва два *Лилавати* и *Виџаганита* су релевантни за математику.

Лилавати је наводно била Баскарина ћерка којој је он посветио тај део. Ту има више аритметичких проблема који се тичу линеарних и квадратних једначина, аритметичке и геометријске прогресије, Питагориних тројки и сличних тема. Неки од проблема су одређеног типа, неки неодређеног. Наводи и метод за решавање квадратне једначине, а и дискутује када постоје два позитивна решења. Каже још:

Ако се решење не може овако наћи (на пример у случају једначине трећег или четвртог степена) онда се мора наћи вештином самог решавача.

Пошто се речима наведу формуле $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, те се формуле примењују за налажење 9^3 (као $(4+5)^3$), 27^3 (као $(20+7)^3$) и 125^3 (најпре се нађе 12^3, а потом $125^3 = (12\cdot 10+5)^3$). Но, потом се објашњава инверзни поступак за налажење квадратног и кубног корена базиран на овим формулама и поступном формирању декадног записа тог кубног корена. Наводи баш примере за налажење кубног корена који су претходној рачуници кубови датих бројева. На пример, тражи да се одреди кубни корен из $1953125 (= 125^3)$. На први поглед делује празно, али и није, метод који наводи омогућава да се поступа без обзира који је у питању број, једино се овде добија резултат релативно брзо и као цео број. Занимљиво је ово питање, али се нећемо даље бавити њиме.

Баскара даје и партикуларна решења (Пелове) једначине $x^2 = 1 + dy^2$ за $d \in \{8, 11, 32, 61, 67\}$. На пример, за $d = 67$ даје решење $x = 1776319049$, $y = 22615390$. Нимало једноставно решење за то време.

Што се геометријских резултата тиче, за π је користио вредност $\frac{22}{7}$, а коректно је навео формуле за површину круга и запремину сфере. У његовом делу налазимо и разматрање пермутација и комбинација, као и опис формула за рачунање $\binom{n}{k}$. Наводи да је количник $a/0$ једнак бесконачности, али потом наводи и да је $a/0 \cdot 0 = a$.

Кералска школа

Индијски астроном и математичар Мадава (1340–1425) рођен је у граду Сангамаграма у области Керал (једна од држава у данашњој Индији носи то име) и он је оснивач једне врло продуктивне школе астрономије и математике која је произвела изузетне резултате. Чланови ове школе су живели, радили и предавали у породичним заједницама које су се звали *илами*. Од самог Мадаве није остало ништа записано од математичких резултата, но његови ученици и њихови ученици су наставили традицију и на основу каснијих записа (из XVI века) знамо до којих су резултата дошли математичари ове школе.

Ево тих резултата.

Развоји тригонометријских функција у степене редове

1. $\theta = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - \cdots;$
2. $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots;$
3. $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots;$
4. $\sin^2\theta = \theta^2 - \frac{\theta^4}{2^2-2/2} + \frac{\theta^6}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)} - \frac{\theta^8}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)(4^2-4/2)} + \cdots.$

У првом и четвртом (који се може извести из трећег) $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, док је у другом и трећем $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Концепт периодичности ових функција развијен је тек касније.

Развоји експлицитно у вези са π

1. $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$, за $i = 1, 2, 3$, где је
$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \quad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2+1)}, \quad f_3(n) = \frac{n^2+4}{2n(n^2+5)}.$$
2. $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots;$

3. $\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5+4\cdot 1} - \frac{4}{3^5+4\cdot 3} + \frac{4}{5^5+4\cdot 5} - \cdots;$

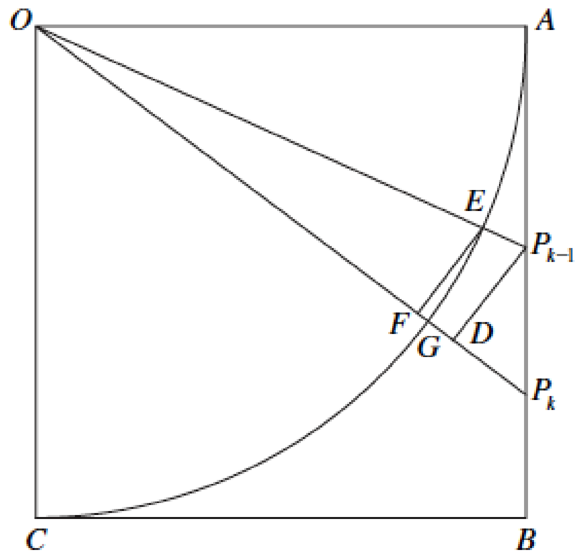
4. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{3\cdot 3}{+} \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots;$

5. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\cdot 2^2-1)-2^2} + \frac{1}{(2\cdot 4^2-1)-4^2} + \frac{1}{(2\cdot 6^2-1)-6^2} + \cdots;$

6. $\frac{\pi-2}{4} \approx \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \cdots \mp \frac{1}{n^2-1} \pm \frac{1}{2((n+1)^2+2)}.$

Сматра се да развоји тригонометријских функција у редове потичу од Мадаве. Занимљиво је и напоменути да су процене грешака у Лајбницовом развоју за $\frac{\pi}{4}$ (први развој у другом списку), остварене помоћу функција f_i, значајне због саме рачунице. Тај алтернирајући ред врло споро конвергира, те додатне функције знатно увећавају апроксимацију. Заправо, то је знатно касније приметио и Њутн у писму Олденбургу из 1676. Он каже да се ту додавањем половине последњег члана или на сличан начин рачунање може извести са великом тачношћу. Читаоци сами могу лако проверити колико то побољшава апроксимацију.

Индијски текстови углавном наводе ове резултате без доказа, али се ипак у неким текстовима могу и наћи докази. На пример, развој функције $\operatorname{arctg} x$ (наш први развој) се, de facto, добија интеграцијом функције $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Наравно да се појам интеграла не спомиње, но формира се заправо интегрална сума за ту функцију (користећи сличности троуглова и апроксимације малих лукова тетивама), та се функција развија у ред, а потом се користи резултат да је $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \sim \frac{1}{k+1}$, када је n велико. Ова апроксимација за суму првих k степена се често појављује у оквиру ове школе. Није ту све наравно у потпуности коректно, али се долази до правог резултата. У текстовима ове школе на Санскриту нема извођења, но текст *Јухтибаса* на малајаламском језику (који је близак тамилском, за кога је вероватно више од нас чуло) садржи методе којима се добијају ове формуле. Приказаћемо како се долази до формуле за развој функције arctg.



Овде је $OA = 1$, четвороугао $OABC$ је квадрат и имамо лук $\widehat{AC}$, који је четвртина круга. Страница AB је подељена на n једнаких делова, $\measuredangle AOP_k = \theta$, $x = AP_k = \operatorname{tg}\theta$, $P_{k-1}P_k = \frac{1}{n}$ (те је $x = \frac{k}{n}$). Осим тога, дужи EF и $P_{k-1}D$ су ортогоналне на дуж AP_k.

Сличност троуглова $\triangle OEF$ и $\triangle OP_{k-1}D$, даје

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ те је } EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ јер је } OE = OA = 1.$$

Троуглови $\triangle P_{k-1}P_kD$ и $\triangle OAP_k$ су такође слични:

$$\frac{P_{k-1}P_k}{OP_k} = \frac{P_{k-1}D}{OA}, \text{ те је } P_{k-1}D = \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k}.$$

Ако OP_{k-1} апроксимирамо са OP_k, добијамо

$$EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}} \approx \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k^2} = \frac{P_{k-1}P_k}{1 + AP_k^2} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Ако лук $\widehat{EG}$ апроксимирамо са EF и искористимо претходну апроксимацију, добијамо

$$\widehat{EG} \approx \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Стога можемо да закључимо да се $\operatorname{arctg} x = \theta$ може апроксимирати сумом

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{j^2}{n^2}}$$

за n (а стога и k) довољно велико.

За даљу апроксимацију, $\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}$ се развија у ред. Ред се добија итеративном процедуром:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \ldots$$

Стога се $\theta = \mathrm{arctg}\, x$ може апроксимирати са (подсетимо се да је $x = \frac{k}{n}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j^2}{n^2} + \frac{j^4}{n^4} - \cdots\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{1}{n^5}\sum_{j=1}^{k} j^4 - \cdots \\ &= \frac{x}{k}\sum_{j=1}^{k} 1 - \frac{x^3}{k^3}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{x^5}{k^5}\sum_{j=1}^{k} j^4 - \cdots.\end{aligned}$$

Ако се искористи горенаведена апроксимација

$$\frac{1}{k^{s+1}}\sum_{j=1}^{k} j^s \approx \frac{1}{s+1},$$

добијамо ($x = \mathrm{tg}\theta$):

$$\theta = \mathrm{tg}\theta - \frac{\mathrm{tg}^3\theta}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5\theta}{5} - \cdots.$$

Индијска математика је интуитивна, посебна, дела су често мешавине погрешних или тривијалних резултата и изузетно вредних. Она су писана у стиховима, нису систематична попут грчких, а не постоји ни континуитет у раду. Но, то је и разумљиво с обзиром на сву сложеност Индије и мноштва нација и језика који ту постоје.

Исламска математика

Појава ислама у трећој деценији VII века довела је до великих арапских освајања. Дамаск је освојен 635. године, Јерусалим 637. док је освајање Египта завршено 642. године. Револуцијом међу исламским вођама на власт 660. године долази династија Умајада. Освојена је цела Северна Африка и Арапи су прешли на тле данашње Шпаније 711. године. Њихова освајања на западу Европе заустављена су у бици код Пуатјеа 732. године. Покушај освајања Византије сломљен је у бици код Константинопоља 717. На истоку је арапска војска освојила Сирију, Персију и стигла и до Индије. Године 750. долази до нове револуције и на власт долази династија Абасида на истоку арапске државе. Умајаде су остале на власти у данашњој Шпанији у форми Кордопског калифата.

Године 762. престоница се из Дамаска сели у новоизграђени град на реци Тигар – Багдад. Багдад постаје велики трговачки и културни центар и његова популација у IX веку достиже 800,000 што га чини у то време већим и од Константинопоља. Освојене територије су биле сигурне наредних 300 година на истоку и 600 година у Шпанији. Наступио је период мира и културног развоја. Владари Абасида Харун ел Рашид (владао у периоду 786–809) и његов син Абу Џафар ел Мамун (813–833) били су велики покровитељи културе и науке. Основана је Кућа мудрости, која је била пандан Библиотеци у Александрији.

Тај научни процват у Багдаду, посебно у математици, свакако се може повезати и са чињеницом да је у то време и у Византији дошло до сличног развоја. Значајна личност у Византији у том смислу био је Лав Математичар (или Лав Филозоф) (око 790–869). Рођен је у Тесалији и сматра се да је, бар делимично, био јерменског порекла. Образовао се у Константинопољу, али је потом отишао на острво Андрос где је математику учио од једног старог монаха. По повратку у Константинопољ издржавао се držeћи приватне часове. Постоји легенда о томе да је један од његових ученика био заробљен у борби против Арапа и да је ел Мамун био толико импресиониран знањем тог студента да је изразио жељу да Лава доведе у Багдад и да му је понудио велику плату. Лав то није прихватио, али је ту ситуацију искористио да поправи свој положај и од византијског цара Теофила добио одобрење да оснује своју школу. Лав је заслужан за преписе многих значајних дела грчке математике. Дела Еуклида, Архимеда, Прокла, Аполонија и других математичара и филозофа била су у његовој библиотеци и арапски научници су имали прилику да та дела преведу на арапски језик. Постоје индиције да је Лав поправио Диофантову скраћеничку алгебру увођењем боље симболике, али то није имало даљег утицаја.

Ел Хорезми

Мухамед бен Муса ел Хорезми (око 780–850), пореклом је, како му само име каже, из Хорезма (данашња Хива) у области која се налази на територији данашњег Узбекистана, па се може наћи да се он води и као узбечки математичар. Но, негде се наводи да је он заправо рођен у околини Багдада, а да су му преци из Хорезма. У сваком случају, за време владавине ел Мамуне, он је био члан Куће мудрости. Значајна су два његова дела. Прво дело је сачувано само у преводу на латински језик: *Algoritmi de numerum indorum* у коме описује декадни систем који је развијен у Индији. Као што смо напоменули, постојало је 9 цифара, али у овом раду ел Хорезми сугерише да се за недостајуће место стави мали кружић – претеча нуле. Санскритска реч *сунја* (празно) је на арапски преведено као *сифр*. Потом на латински као *zephyrum* и одатле имамо и *zero* и *цифру*. У овом делу је он описао рачунање у декадном систему, те је латинизована верзија његовог имена почела да означава најпре тај поступак, а потом и било коју процедуру у коначно много корака за решавање неког проблема.

Другим делом ћемо се више позабавити. Кратко се наводи као *Хисаб ал-џабр в'ал мукабала*, а превод целог наслова би могао да буде *Сажета књига о рачунању по правилима комплетирања и редуковања*. Ради се о решавању алгебарских (заправо само квадратних) једначина и правила се односе на трансформацију израза – ал-џабр се односи на додавање позитивних израза на обе стране једначине да би се елиминисали негативни изрази, а ал-мукабала на редукцију чланова истог типа. О томе смо већ раније писали. Малом променом од ал-џабр долази се до термина *алгебра*. Овде је можда забавно рећи да се у време Дон Кихота (или, ако се тако некоме више допада, у време Мигуела Сервантеса) у Шпанији на вратима многих берберница могао наћи натпис *Algebrista y Sangradoe* (*Намештање костију и пуштање крви*), тако би *алгебриста* могло да се преведе и као *костоломац*.

Алгебра ел Хорезмија је реторичког типа, ту нема симболике, све се описује речима. Он у свом уводу јасно наводи да је имао намеру да напише кратак приручник за решавање конкретних проблема који се тичу наслеђивања, подела, трговине, премеравања и сличним проблемима. Дакле, његово дело није теоријског типа, но је мотивисано праксом. Код њега је присутна доза отклона од грчке геометрије. На пример, једног значајног арапског аутора који је био нешто старији од њега (да не наводимо сада његово име, није нам од значаја за касније), а који је био велики заговорник усвајања грчке математике у Багдаду, он уопште не наводи. Он избегава спомињање Еуклида, мада, као што ћемо видети, он користи геометрију да оправда своје алгебарске трансформације. Касније је, као неку врсту одговора на то, значајни геометар Табит бен Кура, показивао да је то што су радили 'алгебристи' заправо већ садржано код Еуклида.

Код ел Хорезмија нема негативних бројева, чак ни као коефицијената, те је он све линеарне и квадратне једначине свео на шест случајева.

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = b$
3. $ax = b$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$

6. $ax^2 = bx + c$

где су a, b, c дати позитивни рационални бројеви. Речима би, рецимо, случај 4. описао као корени и квадрати једнаки бројевима. Дакле, за њега је x био *корен*, а не *линија, дуж* као код Грка. На прва три случаја се врло кратко задржава, при чему увек најпре своди задати проблем на проблем у коме је коефицијент уз x^2 јединица, било дељењем било множењем одговарајућим бројем. То ради и за остале случајеве, које назива сложеним, те заправо имамо следеће 'сложене' случајеве.

1. $x^2 + px = q$
2. $x^2 + q = px$
3. $x^2 = px + q$

Он најпре даје опис поступака за решавање свих ових случајева, уз конкретан пример, а затим геометријски образлаже зашто је поступак добар. Подсетимо се, он пише приручник, не научно дело.

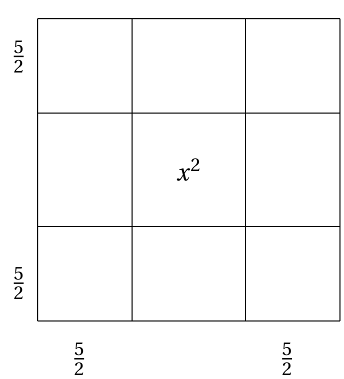
Ево како образлаже први случај (пример који користи је $x^2 + 10x = 39$):

Решење је ово: преполовите број корена, што у овом случају даје пет. То помножите са самим собом; производ је двадесет пет. Додајте то на тридесет девет; сума је шездесет четири. Сада нађите корен из овога, што је осам и одузмите од њега половину броја корена, што је пет; остатак је три. Ово је корен квадрата који сте тражили, сам квадрат је девет.

Занимљиво је да је њему непозната квадрат. Он заправо описује следећу формулу:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Ово оправдава комплетирањем квадрата и то на два начина.

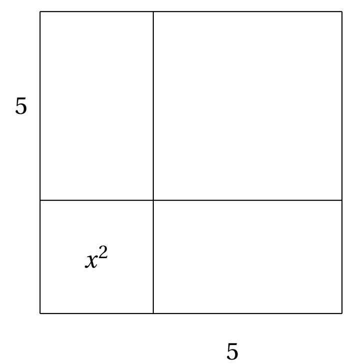


Наравно, код њега нема свих ових ознака, означена су поједина темена и образложено је шта се ради. Формира се непознати квадрат (x^2) и на њега са стране 'накаче' четири правоугаоника чија је друга страница

$\frac{5}{2}$. Тако добијамо четири правоугаоника укупне површине $4 \cdot \frac{5}{2}x = 10x$. Та централна фигура се онда допуни малим квадратима укупне површине $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$ до пуног квадрата који је странице 8. Стога је страница непознатог квадрата $x = 3$. Дакле, овде имамо класично (и буквално) комплетирање квадрата. Формулама би то оправдали овако:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= 39 \\ x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25 \\ (x+5)^2 &= 8^2 \\ x + 5 &= 8 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Други цртеж је убедљивији, свакако је једноставнији.

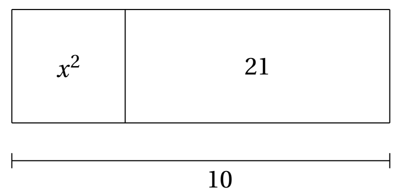


Дакле на непознати квадрат смо 'накачили' два правоугаоника чије су друге странице 5. Укупна површина тог објекта је $x^2 + 10x$. Он се комплетира до квадрата додајући квадрат странице 5. Тако се добија велики квадрат површине $39 + 25 = 64$ и то је то. Заправо је онај први цртеж непотребан, ово друго је јасније и директније образложење. Занимљиво је да се овај конкретан пример после вековима провлачио кроз разне касније уџбенике алгебре.

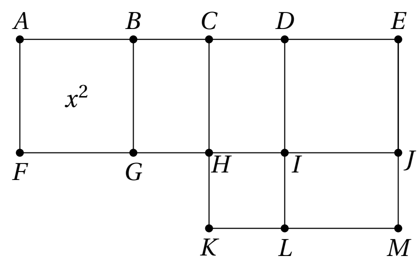
Други случај одговара формули

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Дакле, овде имамо два случаја и ел Хорезми указује на то. Посебно истиче да решење постоји само ако $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ није мање од q и да је решење баш $\frac{p}{2}$ уколико је $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Пример $x^2 + 21 = 10x$ илуструје на следећи начин. Ми ћемо додати цртеж који означава поставку проблема.



Дакле, на непознати квадрат додајемо правоугаоник површине 21, чија је једна страница непознати корен. Заједно добијамо правоугаоник чија је једна страница непознати корен, а друга је једнака 10. Ево и комплетног цртежа.

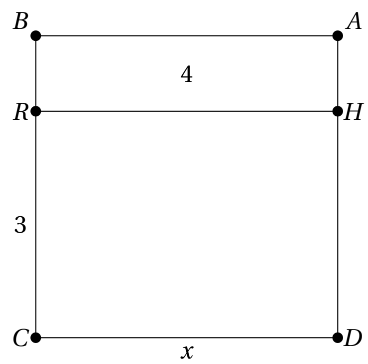


У средишту C дужи AE повлачимо нормалу CK и формирамо квадрат $CEMK$. Тачка H је пресечна тачка те нормале и FJ. Формирамо нови квадрат $HILK$. Ел Хорезми објашњава зашто су правогаоници $BCHG$ и $IJLM$ једнаки (подударни) и онда се може закључити да је 'гномон' $CHILME$ исте површине као и правоугаоник $BEJG$ за који знамо да је површине 21. Квадрат $CEMK$ је површине 25, а квадрат $HILK$ комплетира гномон $CHILME$ до тог квадрата. Стога је $HI = 2$. Но, и $DEJI$ је квадрат, а његова страница је x. Како је $HJ = 5$, добија се да је $x = 5 - 2 = 3$. Ел Хорезми објашњава да је друго решење $x = 5 + 2 = 7$.

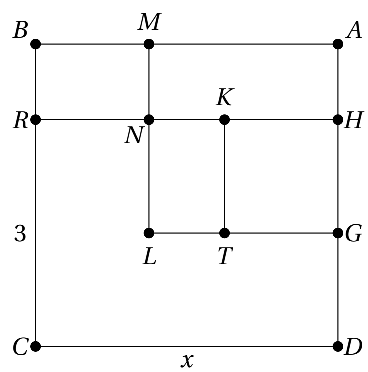
За последњи случај „корени и бројеви једнаки квадрату", тј. за једначину облика $x^2 = px + q$, ел Хорезми даје решење:

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2}.$$

Геометријски то појашњава на примеру $x^2 = 3x + 4$. Најпре поставка проблема.



Дакле, имамо непознати квадрат странице x и њега поделимо на два правоугаоника – један је површине 4, са једном од страница x, док једна страница другог 3, а друга x. Ево решења.



Тачка G је средиште дужи DH. Формира се квадрат $HGTK$. Формира се и квадрат $AGLM$. С обзиром на избор ових тачака, имамо да је $MN = ML - LN = NH - HK = NK$. Такође је $RN = RH - NH = AD - AG = GD = HG = NL$. Стога су правоугаоници $BMNR$ и $NKTL$ подударни. Према томе, површина гномона $AHKTLM$ једнака је површини правоугаоника $BAHR$, тј. једнака је 4. Тај гномон се квадратом $HKTG$, чија је страница $\frac{3}{2}$ допуњава до квадрата странице AG. Дакле, $AG = \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$. Тада је $x = AD = AG + GD = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ (G је средиште дужи DH).

У даљем тексту, ел Хорезми објашњава како се множе биноми, тј. правила за рачунање производа облика $(ax \pm b)(d \pm cx)$ и потом ради разне примере једначина које настају из неких проблема. У делу *Мерење* налазимо разне формуле за рачунање површина и запремина. Нема ту ништа ново, за π предлаже три, добро нам познате, апроксимација: $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{62832}{20000}$.

Значајан део рада посвећен је практичним питањима наследства, поделе имовине и сличним проблемима. Наравно, тај нам део није занимљив.