Диофант; индијска математика 1

Зоран Петровић

22. март 2021.

Завршавамо преглед грчке математике кратком дискусијом о Диофанту и његовом делу.

Диофант

О Диофантовом животу практично ништа није познато. Претпоставља се да је живео и радио у Александрији око 250. године н. е. Сачуван је задатак, који нам открива колико дуго је живео:

Детињство Диофанта је потрајало шестину његовог живота, после још дванаестине му је порасла брада, оженио се после још једне седмине. Пет година после тога му се родио син, који је проживео половину животног века оца, а отац је, скрхан, умро после четири године.

Дакле, једначина која се ту појављује је:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x.$$

Лако налазимо да је $x = 84$, тј. Диофант је проживео 84 године.

Од његових дела остао је део његове *Аритметике* и фрагмент дела *О многоугаоним бројевима*. Ми ћемо се овде позабавити *Аритметиком*. Од тринаест књига сматрало се да је сачувано само првих шест, но седамдесетих година XX века откривено је да су сачуване још четири књиге у арапском преводу и анализом је установљено да су то књиге од четврте до седме.

Аритметика се бави решавањем одређених и неодређених једначина са целобројним коефицијентима у којима се траже позитивна рационална решења. Оно што је важно да одмах напоменемо је да једначине нису ни формулисане ни решаване у геометријском руху, као што је била дуга традиција код Грка после открића несамерљивости, но се њима баратало алгебарски. Мада ћемо видети да се ту могу открити нека дубока геометријска значења (о којима Диофант експлицитно ништа није писао).

Развој алгебре се, у врло грубим цртама, дели на три периода. Најпре имамо период *реторичке* алгебре. Ту се и проблеми и решења формулишу речима, без икакве симболике. Други период је период *синкопатске* (или скраћеничке, ако нам се допусти такав термин) алгебре у којој се користе одређене скраћенице. Диофантово дело припада том периоду. Ту још није права *симболичка* алгебра која представља трећи период, који настаје знатно касније са Вијетом.

Диофант, пре свега, има ознаку за непознату (али само за једну!) и за њене степене до шестог, а користи и негативне степене исто до шестог. Постоји и ознака за јединице, за одузимање и за једнакост. Непознату ћемо означавати са s, пошто је и Диофант користио исту ознаку. Ево листе главних ознака.

1	$\mathring{M}$	$M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$	јединица
s	ς	$`A\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$	број
s^2	Δ^Y	$\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	квадрат (степен)
s^3	K^Y	$K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$	куб
s^4	$\Delta^Y\Delta$	$\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	квадрат $\times$ квадрат
s^5	ΔK^Y	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$	квадрат $\times$ куб
s^6	K^YK	$K\acute{\upsilon}\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$	куб $\times$ куб

Као што видимо, за ознаку непознате, Диофант је користио последње слове речи 'аритмос', што значи број (иначе ς је сигма, али се овако пише на крају речи, тзв. 'завршна сигма'). Као што смо раније навели, разломак $\frac{1}{n}$ би се писао као n', па је и Диофант користио ту ознаку: $\frac{1}{s} = \varsigma'$, али се може наћи и ознака ς^χ, у зависности од издања *Аритметике*. Ознака за једнакост је била ι (што је почетак речи која значи 'једнако'), док је за одузимање коришћен симбол ⋔. За сабирање није постојао посебан симбол, просто су се низали симболи. Део тога је био да је на свакој страни једнакости био израз облика $A-B$, где су у A и B били нанизани симболи, дакле то су биле суме позитивних израза. На пример, једнакост

$$3s^2 + 12 = 4s,$$

би била записана овако:

$$\Delta^Y\gamma\mathring{M}\iota\beta\iota\varsigma\delta.$$

Подсетите се како су писани бројеви (словима, као што је наведено раније). Да ли је Диофант 'признавао' негативне бројеве? Већи део аутора сматра да није. Наиме, он јесте описивао како се врше операције, али то је више био опис како баратати са изразима облика $A-B$, како их сабирати, која су правила за множење. Дакле, знао је да је $(A-B)(C-F) = (AC+BF)-(AF+BC)$, али није експлицитно радио са негативним бројевима. Чини се да је то необично, али математика се не развија онако како је презентирана у уџбеницима.

Диофант је објашњавао и сређивање израза на супротним странама једнакости, како су се на обе стране додавали једнаки изрази да би нестали негативни делови и како су се после скраћивали 'вишкови'. То тачно одговара правилима ал-џабр и ал-мукабала које је касније користио ел Хорезми. На пример, ако имамо једначину

$$3s^3 + 4s - 15 = 15s + 3 - 5s^2,$$

онда најпре додајемо $5s^2 + 15$ на обе стране и добијамо

$$3s^3 + 5s^2 + 4s = 15s + 18,$$

(ал-џабр), а потом скраћујемо (ал-мукабала):

$$3s^3 + 5^2 = 11s + 8.$$

Занимљиво је рећи да се симбол за непознату који је Диофант користио, може наћи и у грчком папирусу, који је познат као Мичиген 620, а који највероватније потиче из II века н. е. Заправо, методе које Диофант примењује за решавање одређених једначина (које имају јединствено позитивно рационално решење) нису суштински нове, познате су из месопотамске математике. Но, Диофант даје образложења онога што ради.

Формулација проблема и поступак решавања код Диофанта типично изгледају овако. Он формулише проблем, који укључује више бројева који се траже (дакле, проблем у старту има више непознатих). Потом, уколико је неопходно, наводи потребне услове који морају да важе да би постојала позитивна рационална решења. За само решавање проблема, Диофант бира конкретне бројеве, а потом тражи решења у облику у коме се сва могу изразити преко једне непознате и то у облику да су неки услови обавезно задовољени, док се други користе да се нађе решење.

Почнимо од једноставнијих (из прве књиге).

27. Наћи два броја за које су њихова сума и њихов производ задати бројеви.

Потребан услов: квадрат половине суме мора бити већи од производа за број који је квадрат.

Дакле, проблем је да се реши систем једначина

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy &= b, \end{aligned}$$

где су a и b задати бројеви при чему се тражи да је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = c^2$, где је c неки (рационалан) број.

Видимо да се проблем своди на решавање квадратне једначин $z^2 - az + b = 0$. Дискриманта је $a^2 - 4b = 4c^2 = (2c)^2$ и видимо да се добијају рационална решења.

28. Наћи два броја за које су њихова сума и збир њихових квадрата задати бројеви.

Потребан услов: Двострука сума њихових квадрата мора премашити квадрат њихове суме за квадрат.

Било би добро да се читаоци увере да потребан услов обезбеђује постојање рационалног решења.

Чести су задаци код Диофанта где је дата сума или разлика два тражена броја. Он поступа као у Месопотамији: ако је задато да је $x + y = a$, он поставља $x = \frac{1}{2}a - s, y = \frac{1}{2}a + s$ и даље то убацује у преостали услов. У случају да је дато $x - y = a$, онда је $x = s + \frac{1}{2}a, y = s - \frac{1}{2}a$ и то се поставља у преостали услов.

На пример, у проблему 28, Диофант конкретно тражи да се реши систем

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x^2 + y^2 &= 208. \end{aligned}$$

Ево како он то решава.

Нека је разлика тих бројева $2s$. Дакле, већи број је $10 + s$, а мањи $10 - s$. Остаје да се учини сума њихових квадрата једнаком 208. Но, сума њихових квадрата је $2s^2 + 200$. Како то мора бити једнако 208, добијамо да s мора бити једнако 2. То значи да је већи број 12, а мањих број 8.

Позабавимо се сада сложенијим типом проблема и методом његовог решавања.

20. (из друге књиге) Наћи два броја тако да квадрат сваког од њих када се дода другом даје квадрат.

Ево решења:

Нека је први број s, други $2s + 1$. Тада квадрат првог сабран са другим даје квадрат. Квадрат другог сабран са првим даје $4s^2 + 5s + 1$. Ово мора бити једнако квадрату. Формирам квадрат од $2s - 2$, који је $4s^2 + 4 - 8s$ и s је $3/13$. Први број је $3/13$, други $19/13$.

Овде на делу видимо оно о чему смо причали. Диофант има две непознате и обе изражава преко једне тако да је један од услова задовољен за све вредности непознате. Потом задовољава други услов на одређени начин. Проблем који му се појављује је следећи: наћи рационалне бројеве s и t тако да је

$$as^2 + bs + c = t^2, \tag{1}$$

где су a, b и c задати, наравно рационални, бројеви. Једначином (1) задата је једна крива другог реда. Проблем који Диофант разматра састоји се заправо у налажењу РАЦИОНАЛНИХ ТАЧАКА на овој кривој.

Наводимо четири метода које Диофант користи при разматрању једначине (1).

ПРВИ МЕТОД. Ако је a квадрат (рационалног броја), $a = e^2$, Диофант поставља $t = es + m$, где се m бира да даје позитивно решење. Видимо да се једначина (1) своди на ($e^2 = a$):

$$as^2 + bs + c = e^2s^2 + 2esm + m^2,$$

тј. добија се линеарна једначина по s. Ово је случај који се појављује у горенаведеном проблему.

ДРУГИ МЕТОД. Ако је c квадрат, $c = f^2$, онда Диофант поставља $t = ms + f$ и добија једначину

$$as^2 + bs + f^2 = m^2s^2 + 2msf + f^2,$$

што после сређивања даје рационално решење за s.

ТРЕЋИ МЕТОД. Он се примењује у случају да немамо линеарни члан у (1), тј. да је у питању једначина облика $as^2+c = t^2$ и да је $a+c$ квадрат. Диофант овај метод објашњава у леми која претходи проблему 12 у десетој књизи.

За дата два броја чија је сума квадрат, бесконачан број квадрата се може наћи тако да када се квадрат помножи једним од тих бројева и производ дода другом, резултат је квадрат.

Другим речима, Диофант тврди да ако су a и c такви да је $a + c$ квадрат (рационалног броја, да се подсетимо), онда постоји бесконачно много (рационалних бројева) x таквих да је ax^2+c квадрат (рационалног броја). Заправо, он ради следеће: поставља $x = s+1$ и добија једначину

$$as^2 + 2as + (a + c) = y^2,$$

која се сада може решити другом методом, јер је слободни коефицијент $a+c$ квадрат. Он овај метод оправдава доказом за конкретан случај $a = 3$, $c = 6$, али није тешко видети да идеја ’пролази’ и у општем случају.

ЧЕТВРТИ МЕТОД. Овај метод Диофант објашњава у леми која је везана за проблем 15 у десетој књизи. Он разматра једначину

$$ax^2 - c = y^2 \tag{2}$$

и тврди да, ако имамо једно решење ове једначине, на пример, $x = d$, $y = e$, онда се увек може наћи још неко решење. Он то показује тако што постави

$$x = d + s, \quad y = e + ms. \tag{3}$$

Заменом у (2) добија се

$$ad^2 + 2ads + s^2 = e^2 + 2ems + m^2s^2,$$

тј.

$$2ad + s = 2em + m^2s,$$

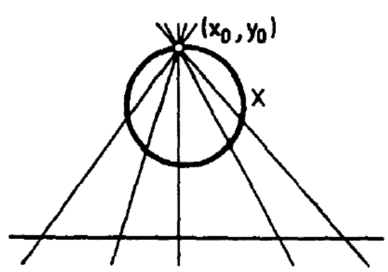
одакле се лако добија s.

Једначина (2) је једначина хиперболе. Једначине (3) заправо задају параметарску једначину праве која пролази кроз једну тачку (d, e) ове хиперболе и потом је сече у још једној тачки.

Пажљив читалац, који је, уз то, био врло вредан када је спремао Анализу 1, приметио је везу претходно наведених метода и Ојлерових смена које се примењују за рачунање интеграла облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција (погледајте неку од збирки или уџбеника за Анализу 1). Ово није необично, заправо суштина је у дискусији о четвртом методу. Наиме, права и недегенерисана крива другог реда су бирационално еквивалентне – могуће је наћи 'скоро' бијекцију између њих, бијекцију која се остварује рационалним функцијама када се избаци коначно много тачака. На пример, баш постављањем праве кроз задату тачку на криву и налажењем, за различите коефицијенте правца, друге пресечне тачке праве и криве.



На цртежу можемо видети како пројектујемо криву другог реда на праву (са криве смо избацили једну тачку). Ова еквиваленција између праве и криве другог реда је 'одговорна' и за чињеницу да је смена променљиве $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ корисна код рачунања интеграла облика

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција, но то је друга прича.

У петој књизи, Диофант разматра једначине вишег степена. И ту се могу наћи сличне и занимљиве идеје. Но, како за криве трећег реда не важи претходно наведено својство, заправо је структура рационалних тачака само у неким ситуацијама правилна, не могу се резултати добијати на исти начин. Ипак, неки аутори у Диофантовим методама препознају имплицитно налажење тангенти на такве криве, а и налажење треће пресечне тачке кроз две дате. Но, ми се нећемо овде тиме дубље бавити.

Десета књига је у потпуности посвећена Питагориним тројкама рационалних бројева, тј. рационалним решењима једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Заправо се ту говори о правоуглим троугловима са рационалним странама, а задаци укључују везе између површина, дужина катета и слично. Ова књига је занимљива, јер је у својој копији издања из 1621. године Пјер де Ферма исписивао коментаре о резултатима Диофанта и ту налазимо његову напомену (после задатка о разлагању на два начина датог квадрата у облику суме два квадрата):

Напротив, немогуће је разложити куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и, уопште, ма који степен већи од два на збир два таква степена. Нашао сам чудесан доказ овога, али су маргине сувише уске за њега.

Ретко ко, заправо верује, да је Ферма уистину имао овакав доказ. Ово тврђење је познато као Велика Фермаова теорема (или Фермаова последња теорема) и доказ је тек деведесетих година прошлог века дао енглески математичар Ендрју Вајлс.

Диофант има још неке занимљиве методе за решавање једначина, но ми немамо времена да се и њима бавимо у овом прегледу. У случају одређених једначина (дакле оних које имају највише коначно много рационалних решења) Диофант се углавном ослања на старију традицију. Но, у случају неодређених једначина, тј. оних које имају бесконачно много рационалних решења, његов допринос је изузетан. Његово дело је извршило значајан утицај на математичаре каснијих епоха и довело до појављивања изузетних проблема, као и нових математичких области (попут диофантовске анализе).

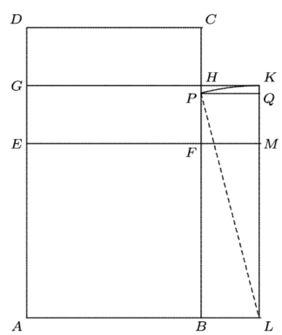
Индијска математика

Археолошка испитивања су показала постојање веома развијене културе у долини Инда око 2650. године п. н. е. , дакле у време египатских градитеља пирамида. Но, немамо математичких докумената из тог периода. Значајна кретања народа, велики број различитих језика, од којих су многи још неразјашњени, отежавају покушај процене математичког нивоа из тих ранијих периода.

Сутре

Веде, религиозни документи, писани на санскриту, садрже позивање на велике бројеве и децимални систем. Ту се могу наћи и димензије, облици, пропорције везани за градњу олтара. То је садржано у „шулва (или шулба) сутрама" – „правилима за конопце". Овде се „шулва" односи на конопце за мерење, док „сутра" означава књигу правила. Постоји више преосталих ових 'сутри', писане су у стиху и вероватно потичу из прве половине првог миленијума п. н. е. мада то не знамо са сигурношћу. Ту се могу наћи Питагорине тројке $3,4,5$, $5,12,13$, $8,15,17$, $12,35,37$. Није искључен месотопамски утицај на ове сутре, али није ни потврђен.

Погледајмо метод квадратуре правоугаоника из једне сутре, а који веома подсећа на грчку 'геометријску алгебру'.



Задат је правоугаоник $ABCD$. На дужим страницама AD и BC поставимо тачке E и F тако да добијемо квадрат $ABFE$. Нека су G и H средишта дужи ED и FC. Продужимо GH до GK, тако да је $ALKG$ квадрат. Продужимо и EF до пресека са KL. Јасно је да су правоугаоници $GHCD$ и $FBLM$ подударни, те је површина правоугаоника $ABCD$ једнака површини квадрата $ALKG$ из кога је избачен мањи квадрат $FMKH$. Но, круг са центром у L, полупречника LK, сече BH у тачки P. Тада је $LQ^2 = LP^2 - PQ^2 = LK^2 - KH^2$, те тражени квадрат има страницу LQ.

У другој сутри налазимо опис конструкције квадрата који је тражени умножак датог квадрата. На пример, ако се тражи квадрат који је седмоструки дати квадрат, чија је страница a, онда се каже да се конструише једнакокраки троугао са основицом $6a$ и крацима $4a$. Висина тог једнакокраког троугла је $\sqrt{(4a)^2-(3a)^2} = a\sqrt{7}$. Дакле, површина квадрата чија је страница једнака висини тог једнакокраког троугла је $7a^2$.

У три сутре налази се апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}.$$

Ово нам, на 8 децимала, даје број $1{,}41421569$, док је $\sqrt{2}$ на истом броју децимала $1{,}41421356$. Апроксимација заиста јесте добра, али нам није познато како је добијена. Иначе, за разлику од Грка, Индијци нису имали никакав проблем да и ирационалне корене сматрају бројевима. То је свакако и у вези са тим да се у индијским математичким текстовима често не разликује тачан од приближног резултата, као што ћемо видети у даљем.

Сиданте

Сиданте су скоријег датума од шулба сутри. Процена је да су оне настале крајем IV, односно почетком V века. Сиданта означава систем или доктрину и овде се односи на астрономске системе. Велико је питање у којој су мери ова дела била независна од грчких извора, пошто се примећује велика сличност са делима аутора из Египта у то, или раније време. Али постоји нешто што их издваја. Док се код Грка разматрала тетива круга и централни угао који јој одговара, у сидантама се разматра половина тетиве и половина централног угла. То јесте мала разлика, али ту видимо наше тригонометријске функције. Занимљиво је како је настао назив са функцију синус. Наиме, тетива се на санскриту звала 'ђива' или 'џиба'. У преводу Арапа, који није користио самогласнике, појављује се само 'џб'. Што може да одговара и речи 'џаиб' која значи и 'залив' на арапском. Познати преводилац из XII века Ђерардо из Кремоне је стога то превео на латински као sinus, што значи 'залив' на латинском. И тако је дошло до назива те нама добро познате функције.