Грчка математика 3

Зоран Петровић

15. март 2021.

Еуклид (наставак)

Пета књига садржи дубље појмове. Ту се разматра теорија пропорција. Књига је у великој мери базирана на Еудоксовим резултатима. О дефиницији 5, смо већ писали раније, док је дефиниција 4 оно што нам је сада познато као Архимедова аксиома (а и сам Архимед то приписује Еудоксу):

Каже се да су две величине у односу једна према другој ако неки умножак ма које од њих може бити већи од друге.

И ову дефиницију смо спомињали када смо говорили о Еудоксу. Поента је да се овде говори о упоредивости две величине. На пример, дуж и квадрат нису упоредиви.

Број ставова у књизи је 25 и у њој има више ставова који говоре о својствима пропорција, али и ставова који говоре о својствима бројева попут асоцијативности множења или дистрибутивности множења према сабирању.

У шестој књизи, у којој има 33 става, теорија пропорција се примењује на сличности разних фигура. Но, наведимо и једну важну дефиницију која се овде појављује.

Дефиниција 3. Каже се да је дуж подељена у крајњој и средњој размери (непрекидно) ако цела дуж стоји према већем делу као већи део према мањем.

Ово је чувени 'златни пресек'. Нисмо споменули раније, али ако се страница правилног петоугла постави дуж његове дијагонале, онда имамо ову поделу дужи. У ставу 30 показује се како се дуж дели на овај начин. Термин непрекидно у нашој литератури је везан за чињеницу да се овај процес никада не завршава (као што смо видели раније).

Занимљив је став 31 (генерализација Питагорине теореме, сетите се и квадратуре 'месеца'):

Код правоуглих троуглова фигура конструисана на страни наспрам правог угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних фигура над странама које образују прав угао.

Седма, осма и девета књига посвећене су теорији бројева, наравно у геометријском руху. Почиње се дефиницијама парних и непарних бројева, простих и сложених бројева, парно-непарних, непарно-непарних, квадратних и кубних бројева. Такође ту налазимо и дефиницију савршеног броја – то је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца. Прва два става су посвећена Еуклидовом алгоритму преко узастопних одузимања као што смо већ писали. У првом ставу се заправо говори о томе да ако се добије 1 на крају тог алгоритма, онда су бројеви узајамно прости, а други став тражи да се опише налажење заједничке мере (не заједничког делиоца, терминологија је прилагођена геометрији) за бројеве који нису узајамно прости. У овој књизи има и других познатих својстава бројева. На пример, став 24 каже да ако су a и c узајамно прости и ако су и b и c узајамно прости, онда су то и ab и c.

Осма књига није превише занимљива за модерног читаоца, док девета садржи неколико занимљивих резултата. На пример, став 20:

Простих бројева је више од сваке задате множине простих бројева.

Наравно да Еуклид не каже да простих бројева има бесконачно много. Појам бесконачности је још далеко у будућности. Он каже да простих бројева има више од ма које количине простих бројева. Доказ је онај који добро знамо: ако је дата нека количина простих бројева, све их помножимо и додамо јединицу. Анализирајући тај број добија се да мора да постоји још неки прост број сем тих задатих.

Став 35 речима на занимљив начин описује метод за налажење суме геометријске прогресије. Исписано формулом то је следеће:

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+\cdots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}.$$

Одавде није тешко извести формулу:

$$a_1+\cdots+a_n=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Последњи, 36. став говори о формули за налажење савршених бројева. У модерним терминима то је следеће: ако је збир $1+2+\cdots+2^{n-1}$ прост број, онда је број $(1+2+\cdots+2^{n-1})2^{n-1}$ савршен број. Наравно није тешко приметити да, ако је број $1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ прост, онда и број n мора бити прост. Наиме, уколико је $n=ab$, где су $a,b>1$, онда је

$$2^n-1=2^{ab}-1=\left(2^a\right)^b-1=(2^a-1)\left(\left(2^a\right)^{b-1}+\cdots+2^a+1\right).$$

Грци су знали прва четири савршена броја: 6, 28, 496 и 8128. Ојлер је показао да је сваки паран савршен број управо горенаведеног облика. Оно што се и даље не зна је да ли има бесконачно много парних савршених бројева, као и да ли уопште постоји непаран савршени број.

Десета књига је најобимнија и најкомпликованија. Она садржи чак 115 ставова и посвећена је проблему (не)самерљивости. На самом почетку налазимо неколико ставова који говоре о алгоритму за испитивање самерљивости величина који смо раније спомињали. Ту се истиче да су величине несамерљиве уколико се поступак никада не завршава, а да се тако налази заједничка мера уколико се поступак завршава. Потом следи низ ставова о међусобним односима самерљивих и несамерљивих величина. Разматрају се дужи самерљиве у степену, мислећи притом на други степен, тј. две величине чији су квадрати несамерљиви. И сложеније формиране величине. Заправо ту се разматрају, у савременим ознакама, величине облика $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. Ту су и поступци рационализације разломака облика $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$, $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$. Јасно је да разматрање овако формираних величина без модерне нотације није лако за праћење и стога се ова књига *Елемената* сматрала најнедоступнијом.

Последње три књиге су у највећој мери посвећене стереометрији. Једанаеста књига почиње низом дефиниција, од којих су неке проблематичне са логичког аспекта, попут „Тело је оно што има дужину, ширину и дубину”, „Граница тела је површина”. Последње дефиниције су дефиниције правилних полиедара: коцке, октаедра, икосаедра и додекаедра (пирамида је раније дефинисана, па овде нема дефиниције тетраедра). Ставови који следе се тичу односа правих и равни, на пример:

Став 3. Ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права.

Став 14. Равни управне на истој правој паралелне су.

Каснији ставови се односе на рогљеве, запремине паралелепипеда и слично.

Дванаеста књига је кратка и почиње нама добро познатим ставовима:

Став 1. Слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати на пречницима.

Став 2. Кругови се односе један према другом као квадрати на пречницима.

Потом следе ставови који се тичу запремина тела. На пример,

Став 7. Свака призма са троуглом у основи може се поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

Став 10. Свака купа је трећина ваљка, ако имају исту основу и једнаке висине.

Последња, тринаеста књига посвећена је правилним полиедрима. Она почиње следећим ставом.

Став 1. Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.

Нама није тешко да се у то уверимо. Наиме, ако је цела дуж a, а x је већи део, онда је $a : x = x : (a - x)$. Добија се квадратна једначина

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Одавде следи да је

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Наравно, одавде није тешко наћи колико је x. И следећих пет ставова даје резултате за златни пресек, а и став 9 је у вези са њим. Став 10 је занимљив.

Став 10. Ако је у круг уписан правилни петоугао, биће квадрат стране тог петоугла једнак збиру квадрата стране правилног шестоугла и стране правилног десетоугла уписаних у исти круг.

Пред сам крај *Елемената*, у ставовима 13–17 одређени су односи квадрата ивице и квадрата пречника описане сфере за правилне полиедре:

тело	однос
тетраедар	$\frac{2}{3}$
октаедар	$\frac{1}{2}$
хексаедар	$\frac{1}{3}$
икосаедар	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$
додекаедар	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

У последњем ставу *Елемената* најпре се пореде ивице правилних полиедара, а у другом делу тог става се показује да нема других правилних полиедара сем ових пет.

Значај Еуклидових *Елемената* је огроман. Састављени су око 300. године п. н. е. и копирани су велики број пута. У тим копирањима, додавани су коменари, неке додатне информације, додатни ставови, па чак и додатне две књиге за које се ипак зна да нису део оригиналних *Елемената*. Сматра се да је било око хиљаду издања овог дела.

Архимед

Архимед је свакако био најзначајнији математичар антике и један од најзначајних математичара икада. Живео у је граду Сиракузи на Сицилији, а школовао се, скоро извесно, у Александрији. Знамо да је погинуо при освајању Сиракузе од стране Римљана 212. г. п. н. е. током Другог пунског рата. Како је, по неким историчарима, тренутку смрти имао 75 година, процена је да је био рођен 287. године п. н. е.

Плутарх, у својој биографији римског генерала Марцела, који је освојио Сиракузу, пише да је Архимед био централна личност у одбрани Сиракузе због многих својих механичких направа које су задале велике невоље римским освајачима. Ипак, Плутарх каже, Архимеду су били дражи његови чисто математички резултати од тих машина.

Архимедови радови дуго времена нису били толико познати као Еуклидови *Елементи* добрим делом и зато што су *Елементи*, као што је већ речено, заправо уџбеник елементарне математике, док Архимедови радови то свакако нису. Има међу њима и једноставнијих списа, но многи су веома напредни и другачији.

Он је имао значајну преписку са александријским математичарима Доситејем, који је био студент Архимедовог блиског пријатеља Конона, и Ератостеном који је дуги низ година био управник александријске Библиотеке. У тим препискама налазимо многе Архимедове радове. Ево списка Архимедових радова који су сачувани.

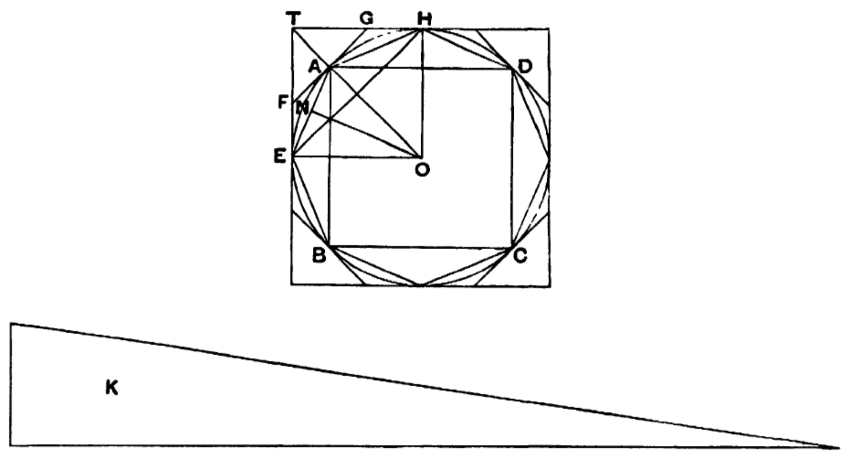
1. О равнотежи равни, Први и Други део
2. Квадратура параболе
3. О сфери и цилиндру, Први и Други део
4. О спиралама
5. О коноидима и сфероидима
6. О плутајућим телима
7. Мерење круга
8. Пребројавање песка
9. Метод
10. Књига лема
11. Проблем о стоци

Преписи ових дела потичу из IX века и касније, чак и значајно касније.

Наравно да нема говора о томе да се можемо позабавити свим овим радовима, посебно не детаљно, но направићемо неки избор.

Мерење круга

То је веома кратак рад и састоји се само од три става. У првом ставу се тврди да је површина круга једнака површини правоуглог троугла чија је једна катета полупречник круга, а друга је једнака обиму круга. Наравно да је то сада нама јасно, но, присетимо се да је питање квадратуре круга било и даље отворено.



Слика 1: Мерење круга

Архимед користи исти метод који смо већ приказали при доказу да се површине кругова односе као квадрати (полу)пречника. Но, ипак га наводимо. Дакле, површина круга може бити једнака, може бити већа, а може бити и мања од површине троугла K. Означимо са $P(k)$ површину круга, а са $P(\mathrm{K})$ површину троугла.

Претпоставимо, најпре да је $P(k) > P(\mathrm{K})$. У круг најпре упишемо квадрат $ABCD$, а потом делимо лукове $\overparen{AB}, \overparen{BC}, \overparen{CD}, \overparen{DA}$ на пола, те тако добијемо правилни осмоугао. Аналогно настављамо поступак све док не добијемо правилни многоугао чије су странице такве да збир површина одговарајућих одсечака круга не буде мањи од разлике површина круга и троугла, тј. мањи од $P(k) - P(\mathrm{K})$. Стога је површина тог многоугла већа од површине троугла K. Но, ако је ON нормала која полази из O до једне од страница тог многоугла (дакле, то је висина троугла $\triangle AEO$, онда је јасно да је $ON < r$, где је r полупречник круга, а и обим тог многоугла је мањи од обима круга k. Према томе, површина тог многоугла, који је растављен на једнакокраке троуглове, и која је заправо једнака површини правоуглог троугла који за катете има ON и дуж једнаке дужине као и обим тог многоугла (просто се саберу површине ових троуглова и то буде јасно), мора бити мања од површине троугла K, што је контрадикција.

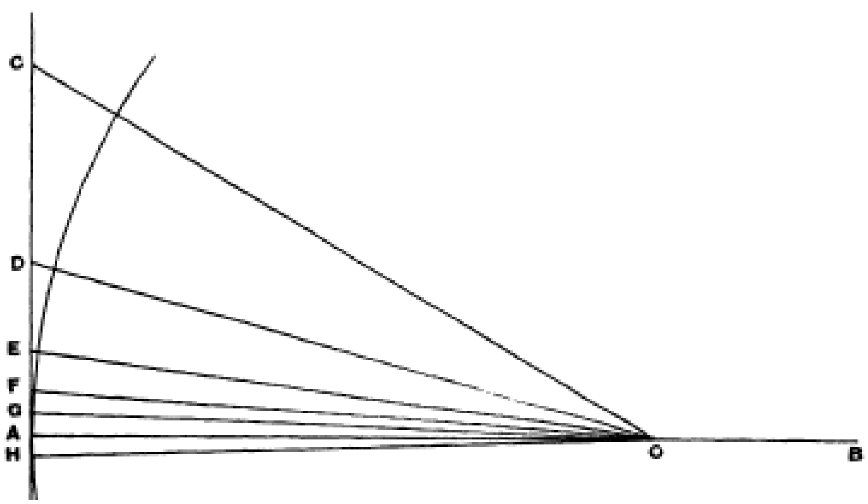
На аналогни начин се, посматрањем овај пут описаних правилних многоуглова долази до контрадикције и уз претпоставку да је $P(k) < P(\mathrm{K})$. Закључује се да мора бити $P(k) = P(\mathrm{K})$.

У ставу 3 се, de facto, доказује процена за π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Наравно, ово је формулисано у терминима процене размере обима круга и његовог пречника. Тај количник, који ми данас означавамо са π, Архимед никако није означавао.

Поступак који је Архимед користио је једноставан.



Он полази од угла који је једнак трећини правог угла, то је на слици угао $\measuredangle AOC$. Зашто од баш тог угла? Разлог је једноставан, када се погледа слика, дуж AC је заправо половина странице правилног шестоугла описаног око датог круга. Архимед потом дели овај угао на пола, (тачка D), поново на пола (тачка E), поново на пола (тачка F) и још једном на пола када добија тачку G. Тада је дуж GH заправо једнака страници правилног 96оугла и Архимед користи обим тог 96оугла да апроксимира обим круга одозго. При рачунању користи процене квадратних корена који се појављују у рачуници. Прва процена коју користи је $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ (касније користи процену $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$). Он не даје никакво објашњење како је дошао до те, а и других, доста сложенијих апроксимација. Заправо, много тога он овде не објашњава, но Еутокије (око 480 – око 540. године), математичар из Палестине, допуњавао је његове рачунице да би могле лакше да се прате (коментарисао је и друга његова дела). Постоје разне хипотезе како је дошао до тих апроксимација, једна од њих сугерише да му је било познато следеће:

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Овде видимо и прву апроксимацију за квадратни корен која се користила у Месопотамији. Занимљивости ради, наведимо још неке процене које је Архимед користио у овом делу:

$$\begin{aligned} 3013\frac{3}{4} &> \sqrt{9082321} \\ 591\frac{1}{8} &< \sqrt{349450} \\ 2339\frac{1}{4} &< \sqrt{5472132\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

Наравно да не треба памтити ове резултате, али да се ту рачунало, рачунало се. Коначно добија процену за π:

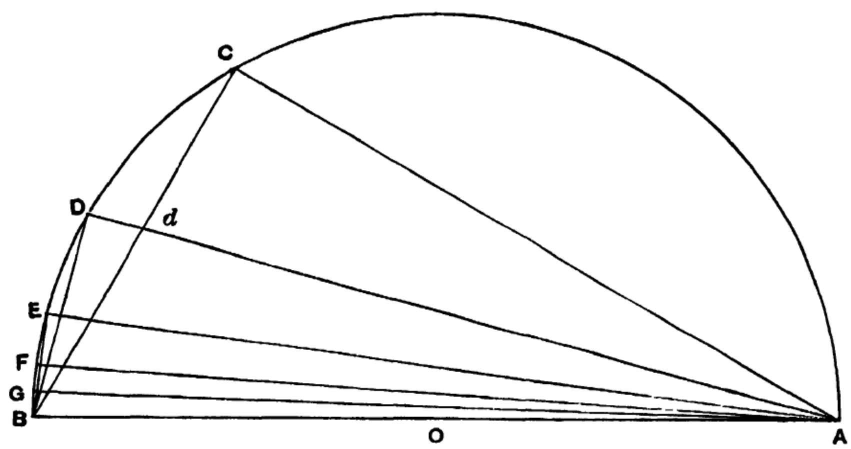
$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}.$$

Мали трик даје коначну процену:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}.$$

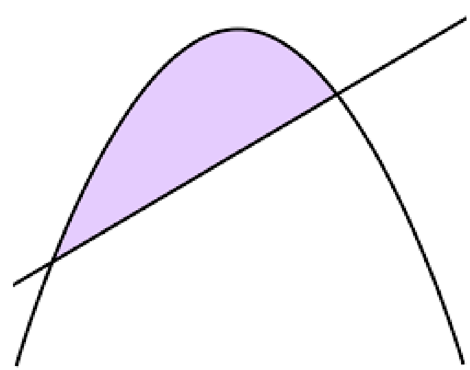
За доњу процену користи наравно уписане правилне многоуглове: и добија:

$$\pi > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$



Квадратура параболе

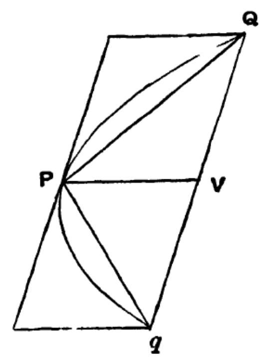
Проблем је једноставан: за дати одсечак параболе (област у равни ограничена параболом и једном правом која је сече) наћи квадрат једнаке површине.



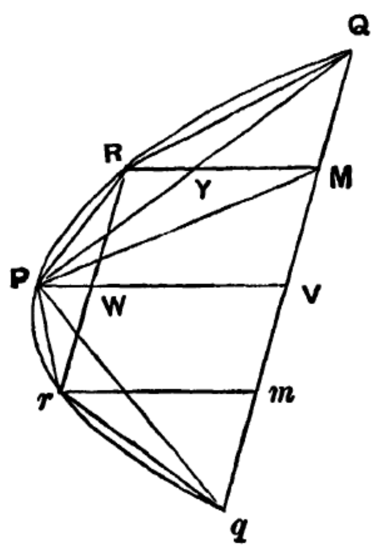
Архимед свој резултат објављује у писму Доситеју и изражава жаљење због смрти Конона, кога је веома поштовао као геометра и који би сигурно могао да лепо процени Архимедов резултат. Архимед наводи да је до резултата прво дошао помоћу механике, а затим га је доказао помоћу геометрије. Он ту презентује оба приступа. Ми ћемо кратко говорити о геометријском приступу.

Основна идеја састоји се у следећем. У дати одсечак параболе уписати троугао максималне површине коме је основица дата тетива. Јасно је да се ради о троуглу чије је теме на параболи, а највише је удаљено од те тетиве. Ми знамо (бар би требало да знамо на основу разматрања из Анализе 1) да је то теме у коме је тангента на параболу паралелна тој тетиви. Наравно, и Архимед је то знао.

Следећа слика је важна.



Овде је $QV = qV$, површине троуглова $\triangle PQV$ и $\triangle qPV$ су једнаке и из паралелограма који се појављују на слици видимо да је површина троугла већа од половине површине тог одсечка. То нам је важно за метод исцрпљивања. У следећем кораку поступак се понавља за два мања одсечка над тетивама Pq и PQ. Архимед је, позивајући



се на Еуклидово дело о конусним пресецима (које немамо сачувано, али, као што смо већ спомињали, знамо за његово постојање), користећи својства параболе на, релативно једноставан начин показао да су површине троуглова $\triangle PRQ$ и $\triangle Prq$ једнаке и да износе једну осмину површине троугла $\triangle QPq$. Дакле, ако са T означимо површину троугла $\triangle QPq$, онда је површина многоугла $QRPrq$ једнака $T+\frac{1}{4}T$. А, као и на почетку, површина додатих троуглова премашује половину површине остатка. Тако да знамо да ће после коначно много корака преостати површина која је мала колико год желимо. Ми бисмо данас просто констатовали да све то значи да је површина одсечка једнака суми реда

$$T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{16}T+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}T=\frac{4}{3}T,$$

но Архимед није сабирао бесконачне редове. Уместо тога, он је доказао следећи став.

Став 23. Ако је дат низ површина $A,B,C,D,\ldots,Z$, од којих је A највећа и свака је једнака четворострукој следећој, онда је

$$A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A.$$

Ово му је било довољно да покаже да је површина одсечка једнака $\frac{4}{3}T$.

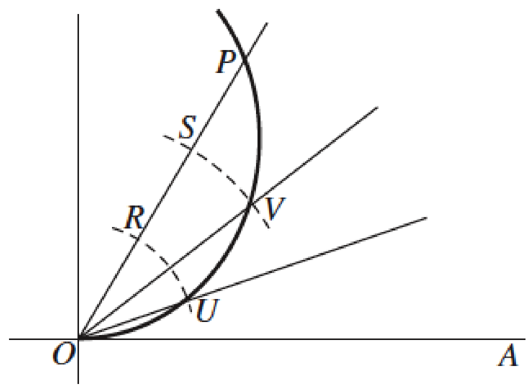
Означимо површину одсечка са Par. Уколико је $\mathrm{Par}>\frac{4}{3}T$, онда би после коначно много корака наведеног поступка добили да нам је остатак површине мањи од $\mathrm{Par}-\frac{4}{3}T$. Како је збир површине добијеног многоугла и тог остатка једнак Par, добили бисмо да је површина тог многоугла већа од $\frac{4}{3}T$. Но, то није могуће јер је површина многоугла једнака $A+B+C+D+\cdots+Z$ (овде наравно узимамо $A=T$, а на основу става 23, $A+B+C+D+\cdots+Z<\frac{4}{3}A$.

Претпоставимо да је $\mathrm{Par}<\frac{4}{3}T$. Полазећи од површине $A=T$ и понављајући поступак долазимо да површине X која је мања од $\frac{4}{3}T-\mathrm{Par}$, а $A+B+C+\cdots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}T$. Дакле, $\frac{4}{3}T$ је веће од $A+B+C+\cdots+X$ за површину која је мања од X, а од Par за површину која је већа од X. То би значило да је $\mathrm{Par}<A+B+C+\cdots+X$, а то наравно није могуће.

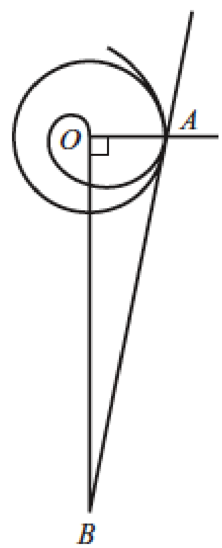
Дакле, на овај начин Архимед искључује две могућности и закључује да мора да важи трећа, тј. $\mathrm{Par}=\frac{4}{3}T$. Видимо да су се овакви резултати доказивали у антици без коришћења граничних процеса.

О спиралама

У раду *О спиралама*, Архимед се бави кривом коју је увео преко кретања – полази се од полуправе и њеног темена. Тачка почиње равномерно да се креће по полуправој, од њеног темена, док се сама полуправа равномерно ротира око свог темена. Крива коју описује ова тачка је спирала, коју данас знамо под именом *Архимедова спирала* и чија је поларна једначина $r = a\theta$. Бављењем овом кривом, Архимед одступа од главног тока грчке геометрије. Можда је један од мотива био и разматрање трисекције угла, као и квадратуре круга које се могу остварити помоћу ове криве:



Да бисмо поделили дати угао на три једнака дела, довољно је поставити угао тако да се један крак поклапа са почетном позицијом полуправе, а потом наћи пресек угла и спирале. То је тачка P на слици. За поделу угла $\measuredangle AOP$ на три једнака дела, довољно је поделити дуж OP на три једнака дела и потом само нацртати одговарајуће лукове круга који у пресеку са спиралом дају тачке V и U и тако и трисекцију угла (уверите се да је ово тако). Није заправо изненађујуће да се помоћу ове спирале добија трисекција угла – и она је крива настала комбинацијом кретања по правој и ротације, као и Хипијина трисектриса. И, као и у том случају, ова крива омогућава и квадратуру круга.



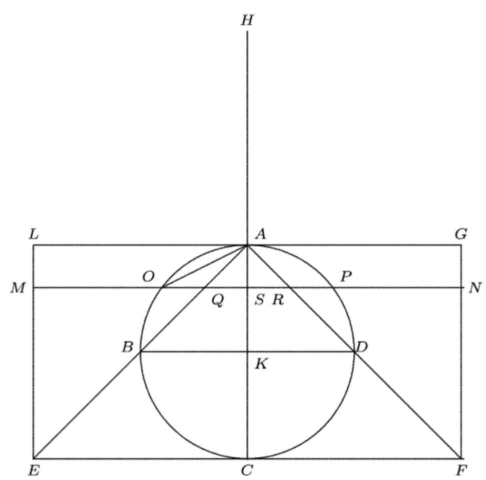
Архимед је показао да, ако је AB тангента на спиралу у тачки A, која се добија на крају прве пуне ротације и ако је $\triangle AOB$ правоугли са правим углом у тачки O, онда је катета OB заправо једнака кружници (једнаке је дужине) са центром у O, полупречника OA. Дакле, као што знамо из његовог рада о мерењу круга, површина $\triangle AOB$ једнака површини круга полупречника OA. Наравно, тада лако налазимо и квадрат исте површине као и тај круг.

Овде се први пут појављује питање налажења тангенте на криву која није конусни пресек. Архимеду је било јасно да је такав проблем, као што уосталом и видимо, еквивалентан квадратури круга.

Метод

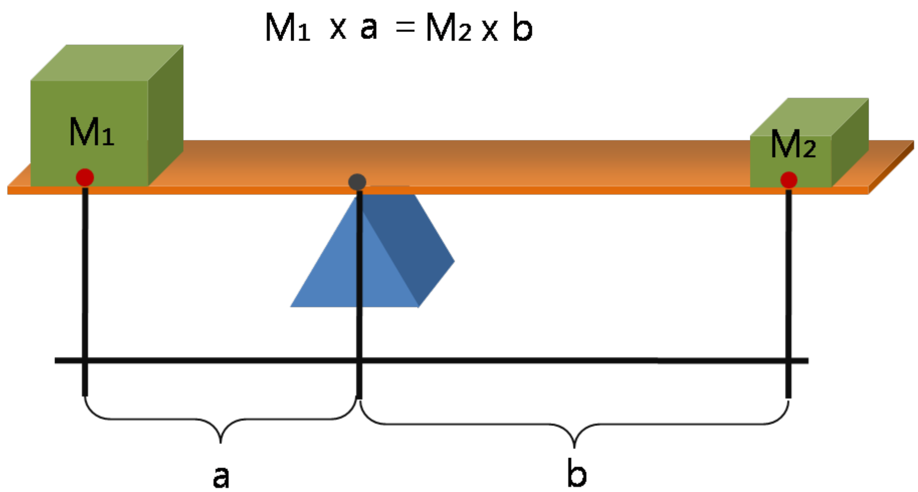
Од посебног је значаја кратко Архимедово дело *Метод*. То дело је било изгубљено дуго времена, мада се знало да је постојало на основу напомена у другим изворима. Нађено је тек 1906. године. Наиме, дански научник Хајберг је сазнао да се у Константинопољу (званичан назив Истанбула је био Константинопољ све до 1923. године, када је формирана Република Турска, а главни град постала Анкара) налази један палимпсест са математичким садржајем. Радило се о пергаменту на коме је избрисан, али не у потпуности, првобитан текст, да би се записао молитвеник који је коришћен у Православној цркви. Хајберг је успео да фотографише листове и открио је да су ту дела Архимеда: *О сфери и цилиндру*, већи део рада *О спиралама*, део рада *Мерење круга* и *О равнотежи равни*, затим *О плутајућим телима* и, најважније од свега, ту је био једини примерак *Метода*. Овај палимпсест је поново изгубљен после Првог светског рата и поново се појавио када је предат на аукцију деведесетих година. Купљен је од стране анонимног дародавца за два милиона долара и касније је модерна технологија искоришћена да се открије оригинални текст у њему.

Шта је заправо *Метод*? Ради се о раду који је Архимед послао као писмо Ератостену, који је тада био управник александријске библиотеке. Архимед ту објашњава како је он долазио до својих резултата користећи не сасвим математички коректно, ‘механичко’ расуђивање. Како он ту пише, лакше је наћи доказ теореме када се зна о чему се ту заправо ради. Навео је као мотивацију како је Еудокс дошао до својих резултата о купи и пирамиди користећи нека претходна размишљања Демокрита у којима није било доказа. Први резултат до кога је Архимед дошао на овај начин је резултат о квадратури параболе. Но, Архимедов омиљени резултат који повезује запремину и површину сфере (пажљив читалац је можда незадовољан разматрањем запремине сфере, сфера је површ, гледа се њена површина, док кугла има запремину, али то је детаљ који нам овде није битан, причамо и о обиму круга, а не кружнице. . .) и цилиндра чија је висина једнака пречнику сфере, а основа великом кругу те сфере.

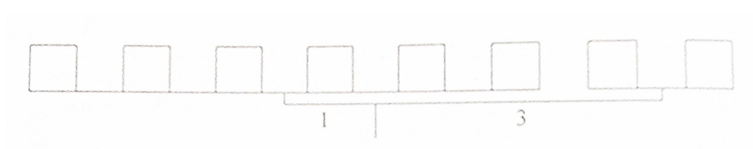


Ротирањем око осе HC добијамо цилиндар, сферу и купу, дакле ова слика нам даје попречни пресек ових тела. Обратите пажњу на чињеницу да је $AGFC$ квадрат, те да је $\triangle ACF$ (а такође и $\triangle ASR$) једнакокраки правоугли троугао.

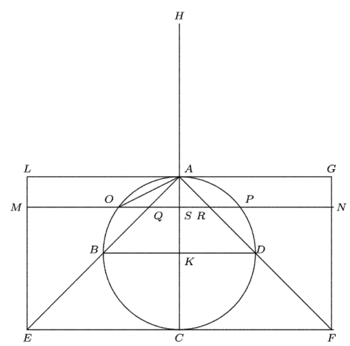
Архимед жели да нађе везу између запремина ових тела користећи закон полуге.



Архимед је извео овај закон пажљивим разматрањем, полазећи најпре од случаја да је $M_1 = M_2$ и да је тада очигледно да се равнотежа постиже када је ослонац на средини, тј. када је $a = b$. Затим је разматрао шта се дешава када су M_1 и M_2 различити, али ипак самерљиви. На пример, ако је $M_1 = 2r\mathrm{m}$, а $M_2 = 2s\mathrm{m}$. Тада се распореди укупно оптерећење дуж целе даске подељене на $2r + 2s$ једнаких делова и у сваком од тих делова постави се оптерећење m. Првих $2r$ тегова представља M_1 и ако посматрамо само тај део, јасно је да је центар масе у средини. Слично и за преосталих $2s$ тегова. А центар масе система је наравно на средини. Доња слика представља случај када је $r = 3$ и $s = 1$.



Распоредили смо 8 малих тегова на подједнаком растојању и онда посматрали центар масе првих 6 и последња 2. Види се да је однос растојања до ослонца $1:3$, те је $a = 1$ и $b = 3$ овде. Архимед је потом разматрао случај да су M_1 и M_2 несамерљиви и претпоставио да не важи наведени однос. У том случају, ако би се тела поставила тако да растојања буду одговарајућа, једно би претегло и он би га заменио лакшим. Рецимо да је заменио M_1 са M_1'. Тада би потражио ново тело M_1'' тако да је $M_1' < M_1'' < M_1$, а које је самерљиво са M_2! Сада је случај свео на самерљиве и даљом анализом добија контрадикцију. У модерној терминологији, овде је Архимед користио чињеницу да се између свака два реална броја налази рационалан број и помоћу рационалних апроксимација добио резултат. Но, ово је он урадио у другим радовима, да се ми посветимо сфери, цилиндру и купи.



Поставимо произвољну раван која је нормална на осу HC и нека је она сече у тачки S. Она сече купу, сферу и цилиндар по круговима полупречника SR, SP и SN редом. Означимо их са k_1, k_2 и k_3. Архимед је приметио да ако кругове k_1 и k_2 поставимо у тачку H, они ће бити у равнотежи са кругом k_3 који остављамо на својој позицији, а тачка ослонца је A. То значи да треба проверити да је

$$(P(k_1)+P(k_2))\cdot AH = P(k_3)\cdot AS.$$

Ако је $x = AS$, а $AK = r$, онда је $SR = AS = x$,

$$SP^2 = KP^2 - SK^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2rx - x^2,$$

а $SN = 2r$, док је $AH = AC = 2r$. Тада је

$$(P(k_1)+P(k_2))\cdot AH = \pi(x^2+2rx-x^2)\cdot 2r = 4r^2\pi x, \text{ а } P(k_3)\cdot AS = \pi(2r)^2\cdot x = 4r^2\pi x.$$

Архимед онда закључује да ако купу и сферу поставимо у тачку H, тј. ако је у тој тачки концентрисана сва њихова запремина, то ће тачно бити у равнотежи ако цео цилиндар концентришемо у његово тежиште, које је у тачки K. Ако са V_1 означимо запремину купе, са V_2 сфере, а са V_3 цилиндра, добија се $(V_1+V_2)\cdot AH = V_3\cdot AK$. С обзиром да је $AH = 2AK$, добијамо

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}V_3.$$

Но, познато је да је $V_1 = \frac{1}{3}V_3$, те мора бити $V_2 = \frac{1}{6}V_3$. Запремина цилиндра је од раније позната: $V_3 = (2r)^2\pi\cdot 2r = 8r^3\pi$, те се тако добија запремина сфере $V_2 = \frac{1}{6}8r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$.

На аналогни начин, разматрајући друга тела, Архимед је добио запремине одсечака елипсоида, хиперболоида, параболоида, а и друге сличне резултате.

Архимед је у делу *О сфери и цилиндру* строго извео доказ формуле за запремину сфере (кугле), али видимо да је први пут до ње дошао оваквим разматрањима. У истом делу је извео и формулу за површину сфере: површина сфере је четворострука површина великог круга те сфере ($4r^2\pi$). Због немогућности квадратуре круга, Грци су имали, да тако кажемо, две основне површине – квадрата и круга, помоћу којих су изражавали остале. Тако је и Архимед површину сфере изразио помоћу површине круга.

Како је имао формуле за запремину и површину сфере, а такође те формуле за цилиндар, могао је да дође до резултата који му је био посебно драг. Наиме, ако посматрамо цилиндар описан око сфере, његова висина једнака је пречнику сфере, а база великом кругу сфере. Ако са r означимо полупречник сфере, тада је њена површина $4r^2\pi$, а запремина $\frac{4}{3}r^3\pi$. Но, површина цилиндра описаног око сфере је $2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi$. Запремина цилиндра је $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$. Имамо да је

$$V(S) : V(C) = \frac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi = 2 : 3, \quad P(S) : P(C) = 4r^2\pi : 6r^2\pi = 2 : 3.$$

Према легенди, Архимед је изразио жељу да му ови односи стоје на надгробној плочи.