Математика Месопотамије; почеци грчке математике

Зоран Петровић

1. март 2021.

Математика Месопотамије

Упоредо са развојем египатске цивилизације, између река Тигра и Еуфрата па и знатно шире у појединим периодима, развијала се такође једна велика цивилизација. Та цивилизација Месопотамије (Међуречја) развијала се према најширим временским оквирима од 2900. г. п.н.е. до Александрових освајања 330. г. п.н.е. Господари су се мењали, али су битне карактеристике за нашу причу остајале довољно конзистентне да можемо говорити о математици Месопотамије (у англосаксонској литератури доминира термин ‘вавилонска математика’).

О цивилизацији Месопотамије имамо знатно више извора, јер, као што знамо глинене плочице (таблице) на којима су писани разни документи су знатно трајнији од папируса, или пергамента. Око 400 хиљада плочица, од којих је неких 400 са математичким садржајем су омогућили многа сазнања чак и обичном животу људи. Као што неки француски научници наводе, више се зна о породичном животу људи у Месопотамији пре више од 3000 година, него што се зна о животу француских сељака из XIII века.

Глинене плочице јесу трајније, али тако немамо записе већих докумената, јер су те плочице величине разгледница. Но, има их довољно да можемо да дамо одређену слику.

Као што знамо, користило се клинасто писмо. Ознака јединице је био танак вертикални знак у облику клина, који ћемо ми означавати са $\curlyvee$, док је за ознаку броја 10 коришћен положени знак у облику нешто ‘дебљег’ клина, који ћемо означавати са $\prec$. На пример, број 46 се пише овако:

$$\begin{array}{c}\prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee\\ \prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee\end{array}$$

Сада долазимо до важне чињенице. У математици Месопотамије користио се позициони систем са основом 60 (сексагезимални систем), али са два недостатка. Први недостатак је био у томе што није постојао симбол за празно место. У запису се остављао мало већи размак, али то није баш било увек јасно. Овај недостатак је при самом крају ове цивилизације исправљен — додата је ознака за празно место у облику два искошена клина, али се овај симбол никада није користио на самом крају броја и то говори о другом недостатку: нема ознаке за децимални (заправо сексагезимални) зарез, мада се види да се у примерима радило и са бројевима који нису били цели. Из контекста се видело о чему се ради.

Дакле, запис

𒌋𒐗 𒌍𒁹 𒐖

могао је да означава број $13 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60 + 2$, али и број $13 \cdot 60^4 + 31 \cdot 60^2 + 2$, као и број $13 + 31 \cdot 60^{-1} + 2 \cdot 60^{-2}$. Заправо, на бесконачно много бројева се односио тај запис. Из контекста се морало схватити о ком се броју заиста ради.

У даљем тексту ћемо користити скраћени запис за сексагезималне бројеве. На пример,

$$12,6;38,23,14$$

означава број

$$12 \cdot 60 + 6 + 38 \cdot 60^{-1} + 23 \cdot 60^{-2} + 14 \cdot 60^{-3}.$$

На једној од таблица можемо наћи апроксимацију за $\sqrt{2}$: $1;24,51,10$. То је прилично добра апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000 \approx 1,41421296296.$$

Како су дошли до овако доброг резултата? Користили су заправо сада нама добро познати алгоритам за налажење приближне вредности $\sqrt{a}$. Наиме, ако је a_1 нека апроксимација за тај корен и ако је тај број, на пример, мањи од корена, онда је број $\frac{a}{a_1}$ друга апроксимација, која је већа од тог корена. И онда се узме аритметичка средина ова два броја као нова апроксимација:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right).$$

Број који се наводи као апроксимација за корен из 2 је заправо следећа апроксимација, тј. a_3, ако је $a_1 = 1;30$ (тј. $1,5$ у децималном запису).

Велики број глинених плочица са математичким садржајем састоји се од разних таблица: реципрочних вредности, квадрата, кубова, квадратних коренова. На пример, имамо овакву таблицу:

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

Ово је евидентно таблица реципрочних вредности. Таква таблица је корисна, јер се рачунање a/b сводило на множење a и $1/b$. Рецимо, да бисмо нашли $34/5$, помножимо 34 са 12 и померимо за једно 'децимално' место. Но, неке вредности овде недостају. Наведене су само реципрочне вредности 'правилних' бројева, тј. оних код којих имамо коначан запис. Рецимо, овде немамо $1/7$. Но, и $1/7$ се може наћи, бар приближно, на неким другим местима. Може се наћи процена:

$$0;8,34,16,59 < \frac{1}{7} < 0;8,34,18.$$

Имамо и апроксимације:

$$\frac{1}{59} = ;1,1,1 \qquad \frac{1}{61} = ;0,59,0,59.$$

Наравно да би овде требало да буде бесконачни развој, но појављује се само коначна апроксимација.

Осим ових, постоје и таблице степена са разним основама, а које се користе у налажењу логаритама са различитим основама. Но, наравно да немамо баш појам логаритма ни приближно, ради се о извесном броју таблица, са циљем решавања неких конкретних проблема.

Линеарне једначине су сматране за једноставне и њима није поклањана превелика пажња. Много су занимљивије биле квадратне, па чак и кубне једначине. Једначине су знали да трансформишу додавањем на обе стране једначине једнаких вредности и множењем обе стране истим бројем

С обзиром да нису разматрани негативни бројеви, постојала су de facto три типа квадратних једначина (а овако ће бити и више од хиљаду година по нестанку ове цивилизације):

1. $x^2 + px = q$,
2. $x^2 = px + q$,
3. $x^2 + q = px$.

Наравно да није постојао никакав симболички запис, ово је само наш запис за разматране једначине. За непознате су се користили термини 'дужина', 'ширина', 'површина', 'запремина'. Но, јасно је да су ти термини ипак коришћени у апстрактном смислу, јер није представљао проблем да се од површине одузима дужина.

Један од проблема је тражио да се одреди дужина странице квадрата ако се добија $14,30$ када се од површине одузме дужина странице квадрата. У нашем садашњем запису ради се о једначини $x^2 - x = 870$. Опис решења није ништа друго до опис метода комплетирања квадрата, односно формуле

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2,$$

за једначину облика 2 (записану као $x^2 - px = q$). Мада овде имамо одузимање, немамо ипак негативна решења. Слично се решавао и први тип једначине. Али, ту имамо још један занимљив пример/метод.

Једначина $11x^2 + 7x = 6;15$ трансформисана је тако што су обе стране помножене са 11 и онда се тако добије једначина $(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45$. Ова има нормалну форму по непознатој $y = 11x$ и решење се налазило као у претходном случају.

Но, трећи тип једначине се сводио на решавање система

$$x + y = p, \quad xy = q.$$

Има више примера за решавање система једначина у којима једна једначина задаје збир (или разлику) две непознате величине, а друга њихов производ. То је, тада, евидентно био неки канонски начин представљања једначина типа 3.

На пример, за решавање система једначина $x + y = 6;30, xy = 7;30$ дат је поступак у коме се најпре израчуна

$$\frac{x+y}{2} = 3;15,$$

затим се ово квадрира:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$$

и израчуна

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45.$$

Тако се добија да је

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 3;3,45$$

и одатле имамо

$$\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1;45.$$

Наравно, посматра се само позитиван корен. Одавде се добијају x и y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 3;15 + 1;45 = 5, \\ y &= \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 3;15 - 1;45 = 1;30. \end{aligned}$$

Посебно је занимљиво решавање кубних једначина за шта нема пандана у египатској математици. С обзиром да је постојала таблица кубова онда су се једноставне једначине попут $x^3 = 0;7,30$ решавале директно из таблице када је то било могуће, односно користећи линеарну интерполацију за добијање решења. Но, постојале су и таблице за $n^3 + n^2$. Те таблице су коришћене за решавање једначина попут једначине

$$144x^3 + 12x^2 = 21.$$

Наиме, множењем обе стране са 12, добија се једначина по непознатој $y = 12x$:

$$y^3 + y^2 = 4,12$$

и добијало се решење $y = 6$, односно $x = 0;30$. Све кубне једначине облика

$$ax^3 + bx^2 = c.$$

могу се свести на једначину

$$y^3 + y^2 = d$$

множењем са a^2/b^3. Немамо податке да ли су они успевали да реше и општију једначину облика $ax^3 + bx^2 + cx = d$, мада су, на основу постојећих примера, могли да нађу одговарајућу смену. Но, нема ниједног таквог примера.

Једна таблица је посебно занимљива, те се и овим година појављују научни радови у којима се разматра њен значај. Она је позната као таблица Плимптон 322, јер је она под тим бројем заведена у Плимптоновој колекцији на Универзитету Колумбија.

Таблица је мало оштећена и по свему судећи је била део веће таблице. Но, оно што имамо су четири колоне бројева од по 15 бројева. Наведимо део те таблице

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6

Наравно, нећемо да памтимо ту таблицу, али можемо мало да проанализирамо шта овде имамо.

Јасно је да последња колона нумерише врсте. Испишимо другу и трећу колону у декадном систему

119	169
3367	4825
4601	6649
12709	18541
65	97
319	481

Тада је:

$$\begin{aligned}
169^2 - 119^2 &= 120^2 \\
4825^2 - 3367^2 &= 3456^2 \\
6649^2 - 4601^2 &= 4800^2 \\
18541^2 - 12709^2 &= 13500^2 \\
97^2 - 65^2 &= 72^2 \\
481^2 - 319^2 &= 360^2
\end{aligned}$$

Дакле, овде имамо Питагорине тројке бројева. Заправо, ако се посматра правоугли троугао у коме је мања катета a, већа катета b и хипотенуза c, онда је прва колона заправо једнака $(c/b)^2 = \sec^2 \alpha$. Наравно, нема смисла сматрати на основу овога да су у старој Месопотамији имали појам секанса угла, ни у Египту ни у Месопотамији немамо увођење мере угла, но ово је ипак занимљив резултат. Нисмо написали целу таблицу, али се правилност и даље одржава — бројеви у првој колони су опадајући. Осим тога, увек је b 'правилан' број, тј. у његовој факторизацији се појављују само прости бројеви 2, 3 и 5, што омогућава коначан запис у основи 60. Нећемо се даље бавити тиме како је таблица формирана.

На крају наведимо и пар речи о геометрији у Месопотамији. Пре свега, јасно је да је Питагорина теорема била позната. На једној таблици имамо квадрат на коме је број 30 написан дуж странице, док су бројеви $42;25,35$ и $1;24,51,10$ записани дуж дијагонале. Приметимо да је овде други број апроксимација за $\sqrt{2}$ и то прилично тачна и да се види да се знало да се дужина дијагонале квадрата добија када се дужина странице помножи са $\sqrt{2}$. Имамо и пример, на једној другој таблици, рачунања полупречника круга описаног око једнакокраког троугла. А имамо и примере задатака где се не ради само о примени Питагорине теореме на једнакокраки троугао. На пример, постоји и задатак где греда дужине 0;30 стоји уз зид и питање је колико ће се доњи део померити од зида ако се горњи део спусти за 0;6.

Занимљива је и таблица у којој су поређене површине и квадрати страница правилних многоуглова са три, четири, пет, шест и седам страница. Неки су резултати приближни, али са добром апроксимацијом. Ту се такође налази и пример поређења обима кружице описане око правилног шестоугла и његовог обима. Из тог резултата се може закључити да је апроксимација за π: 3;7,30, односно $3\frac{1}{8}$ што није лоша апроксимација (мада се за рачунање површине круга ипак најчешће користила вредност 3).

Мане су сличне као и у Египту. Није се правила разлика између тачних и приближних вредности. Па се тако површина четвороугла налазила као производ аритметичких средина парова наспрамних страница, док се за запремину зарубљене пирамиде могла наћи и тачна вредност, али и слабије апроксимације.

За крај можемо рећи да, мада ни у Египту ни у Месопотамији немамо експлицитних доказа, ипак се може наслутити да су постојали методи којима су се решавали општи задаци и да је било и случајева доказа помоћу провере рачуна. Прави математички докази долазе тек са Грцима. Можемо рећи и да математика старијих цивилизација није била сасвим утилитарна. Види се да је ту било и задатака чисто забавног и непрактичног карактера.

Почеци грчке математике

Прве Олимпијске игре одржане су 776. године п. н. е. и у то време је већ постојала значајна грчка литература, но о грчкој математици из тог доба не знамо ништа. Јасно је да је литература могла да се у великој мери преноси усменим предањем и то је сигурно један од разлога што је ситуација била таква. Заправо све до VI века п. н. е. немамо никаквих података о грчкој математици. Тек од тада имамо неке податке, али нема докумената све до IV века п. н. е. Чак и у том веку има мало преосталих оригиналних докумената. Информације које имамо о почецима грчке математике су базиране на каснијим изворима.

Зна се да је Аристотелов студент Еудем, који је пореклом био са Родоса, око 320. године п. н. е. написао Историју математике (он је писао и друге књиге на пример Историју астрономије), но она није сачувана. Касније је неко саставио скраћени запис ове Историје, но ни оригинал тог записа није сачуван. Информација коју имамо о тој Историји садржана је у Прокловим (Прокло је био значајан неоплатонистички филозоф из V века н. е.) *Коментарима о првој књизи Еуклидових Елемената.*

Дакле, информације које имамо о почецима грчке математике нису базиране на оригиналним изворима, него на каснијим документима, односно на историјској традицији. Прва два математичара који се експлицитно спомињу по имену били су Талес из Милета (оквирне године живота: 624–548 п. н. е.) и Питагора са Самоса (око 570–490 п. н. е.).

Талес

Мало се тога са сигурношћу зна о Талесу. Но, традиција га описује као изузетно паметног и сналажљивог човека и сматран је за првог филозофа — он је први од Седам мудраца. Талес је доста путовао и по Египту и по Месопотамији и тамо је имао прилику да се упозна са математиком тих цивилизација. Сматра се да је Талес у Месопотамији могао да види тамошње астрономске таблице. Постоји легенда о томе да је Талес 585. године п. н. е. предвидео помрачење Сунца, али то заиста није потврђена чињеница. Математички резултати који се приписују Талесу су следећи:

- Угао над пречником круга је прав.
- Пречник дели круг на два једнака дела.
- Углови на основи једнакокраког троугла су једнаки.
- Унакрсни углови су једнаки.
- Став УСУ за подударност троуглова.

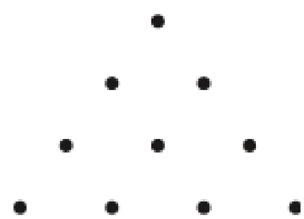
Сада је универзално прихваћена чињеница да су Грци били ти који су дали елементе логичке структуре геометрији, но ипак се не зна да ли је Талес био тај који је то урадио, или је до тога дошло знатно касније, можда чак два века касније.

Питагора и Питагорејци

За име Питагоре везују се разне легенде. Његово место рођења је било близу места рођења Талеса, но животни путеви су им били значајно различити. Док је Талес био познат по својим практичним активностима, Питагора је био пророк и мистик. И он је доста путовао, сигурно и по Египту и Месопотамији, али можда је ишао чак и до Индије. Није небитно навести да је он био савременик и Буде, Конфучија, као и Лао Цеа. По повратку са тих путовања населио се у јужном делу Италије у Кротону, што се у то време сматрало делом Велике Грчке. Основао је тајно друштво, које називамо Питагорејци или Питагоровци. Резултате који се приписују Питагори, исправније је приписати Питагорејцима. Тако ћемо и овде радити, сем у случају када је позната особа којој се приписује конкретан резултат.

Питагорејци су веровали у прочишћење кроз бављење филозофијом и математиком. Сматра се да је сам Питагора смислио речи „филозофија” („љубав ка мудрости”) и „математика” („оно што се учи”). Веровали су у сеобу душе после смрти у друго тело, људско или животињско. Били су вегетаријанци, али су имали и друге специфичне забране.

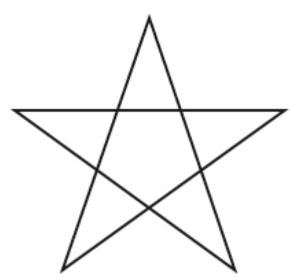
Основни мото Питагорејаца је, поједностављено говорећи, био: „Све је број”. Наравно, овде је број био позитиван цео број, оно што ми данас зовемо природни број. Та фасцинираност бројевима нам сада изгледа наивно, али она ипак лежи у основи покушаја да се свет објасни помоћу бројева, математички. Појединим бројевима су придавана посебна својства, нећемо се наравно тиме бавити, али наведимо да је за њих био посебно важан симбол тетрактис:



Слика 1: Тетрактис

Он представља најсветији, за Питагорејце, број 10. Он је најсветији јер представља збир свих димензија, при чему димензију нула представља једна тачка, димензију један представљају две тачке итд. Занимљиво је да број 10 није Питагорејцима био значајан због чињенице да имамо десет прстију на рукама.

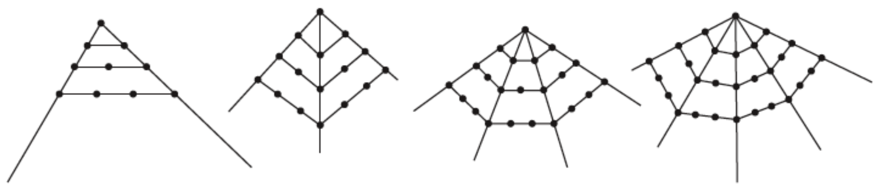
Други значајан симбол био је пентаграм:



Слика 2: Пентаграм

Њега формирају дијагонале правилног петоугла и о њему ће бити речи касније.

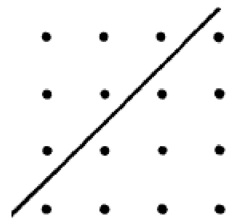
Придруживање бројева објектима, посебно је било видљиво у третирању фигурних, прецизније многоугаоних бројева. Дакле, питање је који бројеви могу бити придружени којим фигурама.



Слика 3: Многоугаони бројеви

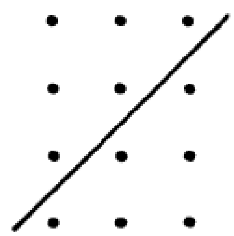
Праве и дужи које се појављују нису део приказа, само су ту ради прегледности, многоугаони бројеви су представљани каменчићима. На претходној слици видимо троугаоне, квадратне, петоугаоне и шестоугаоне бројеве.

Питагорејцима је била занимљива подела многоугаоних бројева на троугаоне, а с тим у вези, јасно, и подела многоуглова на троуглове.



Слика 4: Подела квадратног броја

Ова слика нам приказује поделу квадратног броја на два троугаона чије се странице, разликују за 1, а следећа слика нам приказује поделу 'издуженог' броја (заправо броја облика $n(n+1)$, где је n природан број) на два једнака троугаона:



Слика 5: Подела правоугаоног броја

Питагорејци откривају и везу између односа малих природних бројева и музике. Најпре су открили да ако имамо две жице од којих је једна двоструке дужине, онда оне при трзању емитују исте ноте, које се разликују за октаву – пошто је таласна дужина код дуже жица већа, фреквенција је нижа и стога је тон дубљи, за једну октаву. До хармоније у звуку долази када се односи дужина две жице налазе у једноставним размерама попут 2:3 или 3:4. Разлика у нотама се види у једноставним односима дужина жица. Ту имамо прве законе акустике, а познато је да нису експериментисали само са жицама, него и са другим објектима. На пример, Хипас из Метапонта је имао четири метална диска исте основе, али различитих дебљина – односи дебљина су били $1:1\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}:2$ и показао је да они производе исту хармонију као и жице са одговарајућим односима дужина. Неки му приписују и експерименте са различито напуњеним чашама са сличним ефектом.

Наравно, Питагорејци су, последично, имали и веома смеле разраде ове идеје – да се небеска тела крећу по сферама са таквим односима да производе хармонијске тонове: „хармонија сфера". Наравно, то нам сада делује врло наивно, али идеја да је свемир правилно уређен јесте једна значајна тековина Питагорејаца.

Прокло, на основу Еудема, говори о развоју теорије пропорција код Питагорејаца. Свакако се Питагора у Месопотамији упознао са аритметичком, геометријском и хармонијском средином и односом између њих:

$$a : A(a,b) = H(a,b) : b.$$

где смо са $A(a,b)$ означили аритметичку, а са $H(a,b)$ геометријску средину бројева a и b. Но, они су касније додали још седам 'средина' и тиме комплетирали до укупно 10 (знамо да им је тај број био посебно значајан). Занимљивости ради, наведимо их. Уколико је b 'средина' a и c, онда важе следећи односи:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{a} & (6) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b} \\
(2) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{b} & (7) & \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a} \\
(3) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{c} & (8) & \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a} \\
(4) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{a} & (9) & \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{b}{a} \\
(5) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{b}{a} & (8) & \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}
\end{array}$$

Није тешко проверити да прве три једнакости дају за b редом аритметичку, геометријску и хармонијску средину. Остале ... Забаве ради, можемо да приметимо да, на пример, четврта даје $b = \frac{a^2+c^2}{a+c}$.

Записивање бројева

Направимо сада кратку паузу у разматрањима о теоријским аспектима грчке математике и позабавимо се питањем како су Грци записивали бројеве. Постојала су два начина записивања бројева — атички и јонски.

Атички систем бројева је био сличан каснијем римском систему, мада је имао и неке своје предности. Ево кратке табеле:

број	ознака
1	I
2	II
3	III
4	IIII
5	Γ
10	Δ
100	H
1000	X
10000	M

Предност у односу на каснији римски систем записивања састојао се у томе што се за бројеве 50 и 500 нису користили посебни симболи, него комбинације већ постојећих:

$$50 = \text{𐅄},\ 500 = \text{𐅅},\ 5000 = \text{𐅆},\ 50000 = \text{𐅇},$$

Тако бисмо, на пример, број 45628 записивали овако

$$\text{MMMM 𐅆 𐅅 H Δ Δ 𐅃III}.$$

Јонски систем је био базиран на алфабету. Грчки алфабет потиче од феничанског писма (у коме није било ознака за самогласнике, који су додати) и имао је 24 знака. А Грцима је било потребно 27 знакова. Наиме, систем јесте био формиран тако да се број 10 истицао, али то није био позициони систем. За ознаку јединица користило се 9 слова, за ознаку десетица других девет слова и за ознаку стотица других 9 слова. Дакле, на грчки алфабет додата су још три стара симбола Ϙ,ϙ („копа”, које је и претеча латиничног q), Ϛ,ϛ („стигма”, или „дигама”) и Ϡ,ϡ („сампи”). Најпре су се користила велика слова, мала су уведена тек знатно касније. Ево табеле:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

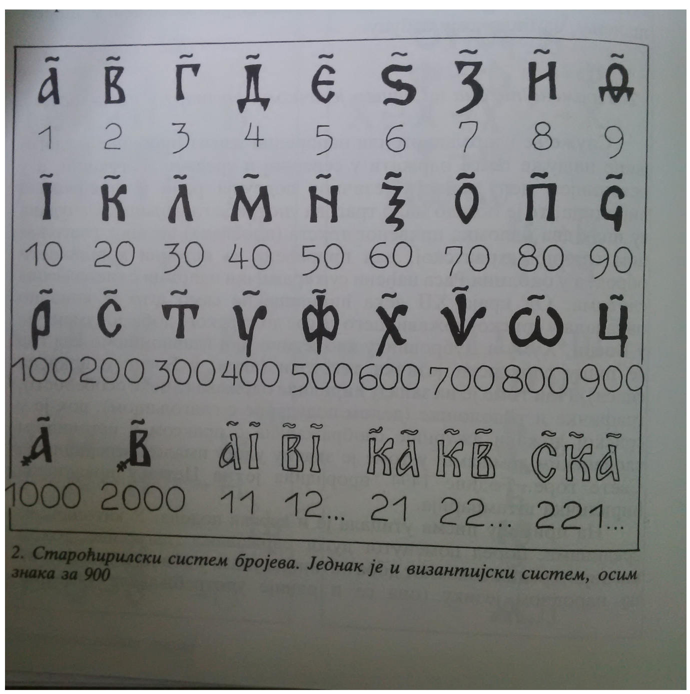
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

На пример, број 967 би се записао овако: ϡξζ. За хиљаде су коришћени знаци за јединице испред којих би се писала доња цртица: ͵α = 1000. На пример ͵βκ = 2020. Тако се без проблема могу записивати природни бројеви мањи од 10000. За веће бројеве користио се симбол M, који је означавао 10000 и онда би се, на пример, број 1345879 записивао овако: $\mathrm{M}\rho\lambda\delta \cdot {}_{,}\varepsilon\omega o\theta$. Дакле, то би заправо било $134 \times 10000 + 5879$, а $\cdot$ је био симбол за раздвајање.

Код писања разломака поново наилазимо на египатску склоност ка јединичним разломцима, тј. разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они би се писали тако што би се после имениоца ставила горња цртица („прим"): разломак $\frac{1}{27}$ би се записивао као $\kappa\zeta'$. Наравно да би ту могло доћи до конфузије: да није то можда $20\frac{1}{7}$? Но, из контекста би се закључивало о ком броју се ради.

Како се рачунало са сигурношћу не можемо да кажемо. Јасно је да су биле коришћене неке рачунаљке, неке табле за рачунање помоћу каменчића, али ниједан такав предмет није сачуван. Постоји слика на једној вази где се види табла за рачунање, а Херодот је записао да је у рачунању са каменчићима Грк радио слева на десно, а Египћанин здесна на лево.

На крају овог дела о записивању бројева наведимо да се и код нас, током средњег века користила оваква варијанта записивања бројева, наравно базирана на ћирилици:



Слика 6: Староћирилски систем бројева

Три конструктивна проблема антике

V век п. н. е. био је период значајног напретка Атине. Започео је успешном одбраном од Персијанаца, а завршен поразом Спарте од Атине. Велики напредак Атине у ово Периклово доба утицао је на прилив значајног броја учених људи у Атину. Један од њих је био и Анаксагора, који је рођен у Јонији у Малој Азији у време док је она била под влашћу Персије. Био је пријатељ Перикла и човек слободног мишљења. Вероватно су оба ова разлога (Перикле је имао и јаке политичке противнике у Атини) утицала на то да буде оптужен за безбожност – тврдио је да ни Сунце ни Месец нису божанства. Сунце је само врео камен величине Пелопонеза, док је Месец светлост добијао од Сунца и рефлектовао га на Земљу. Неко време је и провео у затвору из кога га је избавио Перикле, али је ипак морао да оде у изгнанству у коме је и умро 428. године п. н. е. – годину дана пре рођења Платона и годину дана после смрти Перикла.

Како је Плутарх писао, Анаксагора се у затвору у Атини бавио и проблемом квадратуре круга – како наћи квадрат који има исту површину као и дати круг. Ту први пут наилазимо на спомињање овог проблема. Није било јасно шта је дозвољено користити у ту сврху, али је касније (највероватније и доста касније, под утицајем Платона) било искристалисано да је за ту сврху дозвољено користити само лењир и шестар.

Перикле је умро од куге која је харала Атином и за коју се сматра да је тада од ње умро скоро четвртина становника Атине. За епидемију куге се везује и прича о другом конструктивном проблему антике. Наводно су Атињани послали делегацију у храм Аполона у Делфима да питају шта би требало да ураде да зауставе епидемију куге. Добили су одговор од пророчишта да морају да удвоструче олтар у облику коцке који је био посвећен Аполону. Атињани су удвостричили дужину странице, но куга није престала. Јасно је да тиме нису решили проблем, јер су тако добили осам пута већу запремину олтара. Ово је прво спомињање проблема удвостручавања коцке.

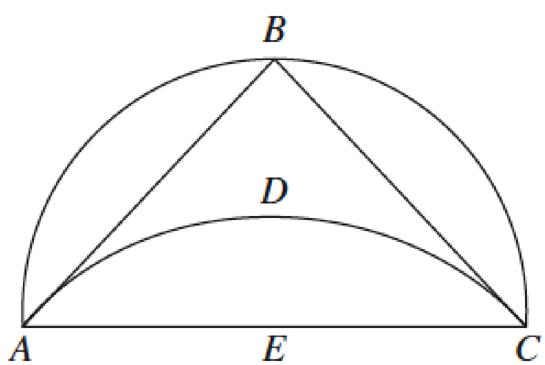
Такође је у ово време у Атини 'циркулисао' проблем трисекције угла: како дати угао поделити на три једнака дела. Ови проблеми, посебно каснији захтеви за њихово решавање, где се конструкција морала извршити искључиво помоћу лењира и шестара, утицали су значајно на развој математике и дуго векова нису били разрешени. Но, већ је у античко доба било неких решења која, додуше, нису била при тим рестриктивним условима, али и поред тога су била занимљива.

Хипократова квадратура „месеца”

Хипократ са Хиоса (то није лекар Хипократ који је био са Коса) је био нешто млађи од Анаксагоре и у Атину је дошао око 430. године п. н. е. да се бави трговином. Но, сву имовину је изгубио, да ли због неке преваре или због напада гусара, не знамо, али знамо да га то није обесхрабрило. Окренуо се студијама геометрије. Написао је и прве „Елементе геометрије”, неких сто година пре Еуклидових *Елемената*, али то дело, нажалост, није сачувано, али да је постојало знамо преко Аристотела. Податке о Хипократовој математици имамо од Симплиција који је око 520. године наше ере, ископирао, по својим речима, делове Еудемове „Историје математике”.

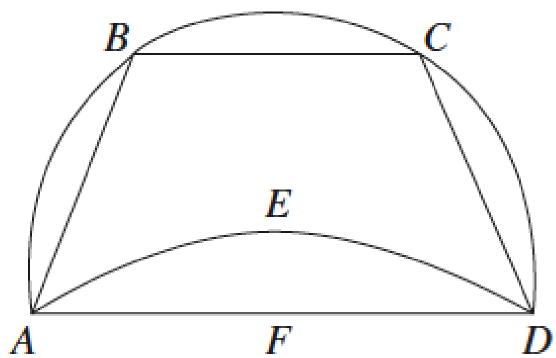
По тим подацима, Хипократ је извршио квадратуру „месеца”. Под „месецом” се подразумевала криволинијска фигура коју ограничавају два лука кругова различитог полупречника. Најпре се код Еудема наводи да је Хипократ доказао следећу теорему: Површине два слична одсечка два круга се односе као квадрати њихових тетива (одсечци су слични ако одговарају истом централном углу). Заправо Еудем тврди да је Хипократ до овог резултата дошао тако што је показао да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника. Тешко је поверовати да је Хипократ имао доказ овог резултата. Вероватно је имао неки аргумент којим је оправдавао валидност те теореме, али доказ скоро сигурно није имао. Ми ћемо касније презентирати значајно каснији доказ те чињенице Тај доказ је базиран на знатно суптилнијим методама него оним које су биле доступне Хипократу.

Ево како је, базирано на претходним резултатима, Хипократ извео квадратуре неких „месеца”. Као први пример посматрајмо једнакокраки правоугли троугао и одговарајући полукруг.



Конструишимо и лук над AC тако да је новодобијени одсечак $AECD$ сличан одсечцима над тетивама AB и BC. Како је $AB^2+BC^2=AC^2$ (због једноставности записа, нисмо писали $|AB|$ као дужину странице AB, тако ћемо радити и даље), а према наведеном резултату површине сличних одсечака се односе као квадрати одговарајућих тетива, добијамо да је површина одсечка $AECD$ једнака збиру површина одсечака над AB и BC. „Месец” $ADCB$ који образују полукруг и лук $\widehat{AC}$ састоји се од та два одсечка и ‘криволинијског’ троугла у коме је основа лук $\widehat{AC}$. Но, збир површина та два одсечка, једнак је површини одсечка $AECD$, који заједно са тим ‘криволинијским’ троуглом чини троугао ACB. Стога је површина тог „месеца” једнака површини троугла ACB. А лако је наћи квадрат чија је површина једнака површини троугла ACB: то је квадрат над половином странице AC. Тако је извршена и квадратура „месеца” $ADCB$.

Други пример квадратуре „месеца” добија се помоћу једнакокраког трапеза $ABCD$ у коме је $AB = BC = CD$ и $AD^2 = DC^2 + CB^2 + BA^2$.



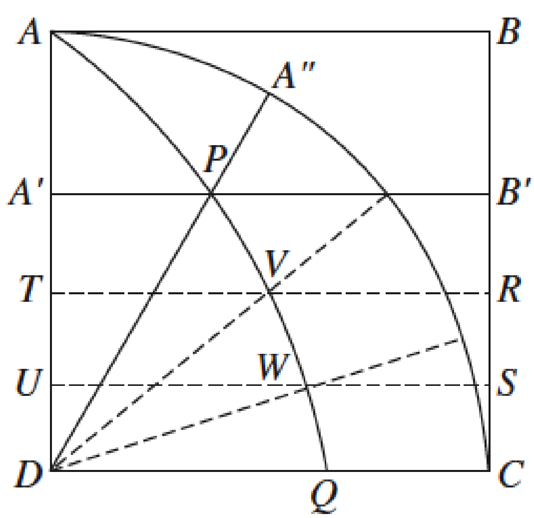
Као и у претходном примеру, на основу ове везе међу квадратима над одговараћим дужима и резултата о површини одсечака, добијамо да је површина месеца $AEDCB$ једнака површини трапеза $ABCD$. Наравно да се без већих проблема може наћи и квадрат који има исту површину као и овај трапез те је тиме извршена квадратура још једног „месеца”. Један од коментатора Аристотела наводи још неке примере квадратура „месеца”, но ова два примера су нам довољна.

Видимо да су математичари у Атини крајем V века п. н. е. са успехом баратали трансформацијама површина разних фигура. Посебно, они су знали како да изврше квадратуру правоугаоника, што се своди на налажење x из пропорције $a : x = x : b$. Стога је природно да су се они занимали и проблемом продужене пропорције, тј. налажењем x и y за које је $a : x = x : y = y : b$. Заправо, наводи се да је Хипократ препознао да се овај проблем у случају када је $b = 2a$ своди на проблем удвостручавања коцке — из $a : x = x : y = y : 2a$, добија се да је да $x^3 = 2a^3$. Дакле, Хипократ је разматрао и проблем удвостручавања коцке. Нема никаквих записа о томе да ли се он бавио и трећим великим проблемом — проблемом трисекције угла. Но, познато је који се математичар бавио овим проблемом.

Хипијина трисектриса

У V веку п. н. е. са развојем грчког друштва, појавила се и потреба за другачијим и ширим образовањем слободних људи. Ту су софисти били посебно значајни. Софисти су били свестрано образовани људи, са великим и разноврсним искуством и фокус њиховог интересовања није било утврђивање великих истина о природи него подучавање вештини живљења и управљања животом. Можда и главни фокус њиховог образовања је било образовање у реторици, али баш ту се и крије један од разлога што су многи софисти изашли на лош глас. Јер, да ли је циљ говорништва да непристрасно изнесе ставове, или да, у ко зна које сврхе, убеди саговорника у нешто. Ми се наравно нећемо детаљно бавити софистима, разлог због којих су они споменути овде је што је један од истакнутих софиста био и Хипија из Елиде.

Хипија је био свестрано образован, али је важио и за хвалисавог човека. Приписује му се изјава да је зарађивао више од ма која друга два софиста заједно. Много тога је писао, али ниједно дело није остало до наших дана. Но, оно што је нама занимљиво је да је он био први који је у математику увео криву која није ни права ни круг. Крива коју је он увео спада у, такозване, механичке криве: она је формирана као скуп тачака при неком кретању. Погледајмо следећу слику.



Замислите да истовремено равномерно 'спуштате' ивицу AB квадрата $ABCD$ паралелно надоле и ротирате ивицу DA око тачке D ка ивици DC. Дакле, оба кретања су равномерна и врше се тако да се у истом тренутку транслирана ивица AB поклопи са ивицом DC, када и ротирана ивица DA са истом ивицом. Ако је $A'B'$ тренутни положај ивице AB, а DA" тренутни положај ивице DA, у пресеку добијамо тачку P. Геометријско место тачака које се тако добијају и формира ту криву. Обратимо пажњу на чињеницу да тачка Q није добијена у пресеку ових ивица јер су се оне преклопиле у том тренутку. Она је ту додата као гранична тачка.

Ова крива је позната и под именом Хипијина трисектриса. Зашто трисектриса? Једноставан је разлог, ако имамо ову криву, онда можемо да извршимо трисекцију (поделу на три једнака дела) сваког оштрог угла (а то је и довољно, јер се онда сигурно може извести трисекција и ма ког угла). Рецимо да је угао који желимо да поделимо $\measuredangle CDA$". Тачка P је пресек дужи DA" и трисектрисе. Позиција дужи AB коју спуштамо надоле, а која одговара тачки P је $A'B'$. С обзиром да исто времена треба дужи $A'B'$ да се спусти до дужи DC, колико и дужи DA" да се спусти до исте дужи, онда се за трећину тог времена дуж DA" ротирала за трећину угла $\measuredangle CDA$". Дакле, само је потребно поделити дуж DA' на три једнака дела тачкама T и U и исцртати две паралелне дужи TR и US. У пресеку се добијају тачке V и W и пошто је $A'T = TU = UD$, онда је и $\measuredangle PDV = \measuredangle VDW = \measuredangle WDQ$. Тако смо дакле почетни угао поделили на три једнака дела. Трисектриса нам је проблем трисекције угла свела на проблем трисекције дужи, а то је лак проблем. Наравно, ова крива се не може конструисати помоћу лењира и шестара, те није решење проблема у каснијој, рестриктивној, његовој варијанти.