# Алгебра

4. 6. 2010.

1. Доказати да је $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ потпоље поља $\mathbb{C}$.
2. Нека су $E$ и $F$ поља и $f : E \to F$ хомоморфизам. Доказати да је $f$ „1–1“ (присетимо се да је $f(1_E) = 1_F$).
3. Нека су $E$ и $F$ поља и $f : E \to F$ хомоморфизам. Каква је веза између $\mathrm{char}(E)$ и $\mathrm{char}(F)$?
4. Показати да поља $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ нису изоморфна.
5. Доказати да је са $f(p) = p(i)$, где је $i$ имагинарна јединица, дефинисан један хомоморфизам прстена $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$. Применити теорему о изоморфизму прстена на овај хоморфизам.
6. Доказати да је се $f(p) = p(\sqrt{2})$ дефинисан један хомоморфизам прстена $f : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R}$. Применити теорему о изоморфизму прстена на овај хомоморфизам.
7. Доказати да је $G = \{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\}$ подгрупа групе $\mathbb{C}^\times$. Из теорије знамо да је $G$ циклична. Одредити све генераторе те групе.
8. Решити системе конгруенција:
   (а) $x \equiv 3 \pmod{7}, \quad x \equiv 5 \pmod{8}$;
   (б) $x \equiv 1 \pmod{11}, \quad x \equiv 5 \pmod{15}$;
   (в) $x \equiv -4 \pmod{16}, \quad x \equiv 5 \pmod{7}$;
   (г) $x \equiv 5 \pmod{13}, \quad x \equiv -1 \pmod{8} \quad x \equiv 4 \pmod{7}$;
   (д) $x \equiv 5 \pmod{23}, \quad x \equiv 3 \pmod{18} \quad x \equiv 2 \pmod{17}$;
   (ђ) $x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 1 \pmod{8} \quad x \equiv -4 \pmod{11}$.
9. Испитати да ли решење постоји и у потврдном случају наћи сва решења наведених конгруенција:
   (а) $3x \equiv 4 \pmod{7}$;
   (б) $4x \equiv 2 \pmod{6}$;
   (в) $15x \equiv 4 \pmod{10}$;
   (г) $12x \equiv 21 \pmod{15}$;
10. Одредити остатак при дељењу $2005^{2005}$ бројем 14.
11. Одредити остатак при дељењу броја $1248^{632}$ бројем 39.
12. Одредити остатак при дељењу броја $1235^{27262}$ бројем 105.
13. Одредити најмањи природан број $m$ за који је $1823^{242} \equiv m \pmod{18}$.